

分数階二項分布に関する極限定理

難波 隆弥* (京都産業大学)

本講演の内容は日野正訓氏 (京都大学) との共同研究に基づく。パラメータが $n \in \mathbb{N}$ と $x \in [0, 1]$ の二項分布

$$\mu_x^{(n)} := \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \delta_j$$

や, 連続関数 $f \in C([0, 1])$ に作用する正值線形作用素である Bernstein 作用素

$$B_n f(x) := \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{\cdot}{n}\right) d\mu_x^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} f\left(\frac{j}{n}\right), \quad x \in [0, 1]$$

については極限定理を含む様々な性質が知られている。本講演では, Hara–Hino [HH10] により示された, 古典的な二項定理の拡張である**一般化二項定理**に基づき, 分数階二項分布ならびに分数階 Bernstein 作用素を導入し, その基本的な性質や極限定理について紹介する。

定義 1 (cf. [HN24, Definition 1.3]) $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in (0, 1)$ とする。 $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ 上の確率分布

$$\mu_{\alpha, x}^{(n)} := \sum_{j=0}^n \frac{\alpha}{Z_{\alpha, x}^{(n)}} \binom{\alpha n}{\alpha j} x^{\alpha j} (1-x)^{\alpha(n-j)} \delta_j$$

を**分数階二項分布**という。ここに, $Z_{\alpha, x}^{(n)} > 0$ は正規化定数である。また, $Z_{\alpha, 0}^{(n)} = Z_{\alpha, 1}^{(n)} = \alpha$ かつ $\mu_{\alpha, 0}^{(n)} = \delta_0$, $\mu_{\alpha, 1}^{(n)} = \delta_1$ と定義する。

定義 2 (cf. [HN24, Definition 1.8]) $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ とする。連続関数 $f \in C([0, 1])$ に作用する正值線形作用素

$$B_{\alpha, n} f(x) := \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{\cdot}{n}\right) d\mu_{\alpha, x}^{(n)} = \sum_{j=0}^n \frac{\alpha}{Z_{\alpha, x}^{(n)}} \binom{\alpha n}{\alpha j} x^{\alpha j} (1-x)^{\alpha(n-j)} f\left(\frac{j}{n}\right), \quad x \in [0, 1]$$

を**分数階 Bernstein 作用素**という。

なお, 分数階二項分布 $\mu_{1, x}^{(n)}$ は古典的な二項分布 $\mu_x^{(n)}$ に, 分数階 Bernstein 作用素 $B_{1, n}$ は古典的な Bernstein 作用素 B_n にそれぞれ一致する。

*E-mail: rnamba@cc.kyoto-su.ac.jp

主結果

本講演では, [HN24] ならびに [HN25] で得られた以下の結果について紹介する.

- (1) 分数階二項分布 $\mu_{\alpha,x}^{(n)}$ のモーメントの具体的表示を得た. 特に, $S_{\alpha,x}^{(n)} \stackrel{(d)}{\sim} \mu_{\alpha,x}^{(n)}$ の期待値と分散はそれぞれ

$$\mathbb{E}[S_{\alpha,x}^{(n)}] = nx + O(e^{-\delta n}), \quad \text{Var}(S_{\alpha,x}^{(n)}) = \frac{1}{\alpha}nx(1-x) + O(e^{-\delta n}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

で与えられることを示した. ここに, ある定数 $\delta > 0$ は $x \in (0, 1)$ と $\alpha \in (0, \infty)$ について広義一様にとれる.

- (2) 分数階二項分布 $\mu_{\alpha,x}^{(n)}$ に関して, 基本的な極限定理である大数の弱法則, 中心極限定理, 少数の法則, 大 (中) 偏差原理, Berry–Essenn 型評価を得た. 特に $\alpha \neq 1$ のとき, $\mu_{\alpha,x}^{(n)}$ に関する少数の法則を通じて, Poisson 分布ではない $\{0, 1, 2, \dots\}$ 上の極限分布を得た.
- (3) 分数階 Bernstein 作用素は任意の連続関数 $f \in C([0, 1])$ を一様近似する, すなわち $\|B_{\alpha,n}f - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つことを示した.
- (4) $\mathcal{L}_{\alpha} = (2\alpha)^{-1}x(1-x)(d^2/dx^2)$ とおき, $(T_{\alpha}(t))_{t \geq 0}$ を $(\mathcal{L}_{\alpha}, C^2([0, 1]))$ を生成作用素とする $C([0, 1])$ 上の Feller 半群とする. このとき, 任意の $t \geq 0$ と $f \in C([0, 1])$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{\alpha,n}^{[nt]}f - T_{\alpha}(t)f\|_{\infty} = 0$$

が成り立つことを示した. さらに, パラメータ $\alpha > 0$ は連続関数 $\alpha(x): [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ で置き換えられることに注意して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{\alpha(\cdot),n}^{[nt]}f - T_{\alpha(\cdot)}(t)f\|_{\infty} = 0$$

が成り立つことも示した.

参考文献

- [HH10] K. Hara and M. Hino: *Fractional order Taylor's series and the neo-classical inequality*, Bull. London Math. Soc. **42** (2010), 467–477.
- [HN24] M. Hino and R. Namba: *Fractional binomial distributions induced by the generalized binomial theorem and their applications*, Preprint (2024), available at [arXiv:2408.12011](https://arxiv.org/abs/2408.12011).
- [HN25] M. Hino and R. Namba: *Asymptotic behaviors of fractional binomial distributions derived from the generalized binomial theorem*, Preprint (2025), available at [arXiv:2506.10438](https://arxiv.org/abs/2506.10438).