

Rough path lifts of multifractional Brownian motions

永沼 伸顕*(熊本大学)

本講演では多重非整数 Brown 運動に付随するラフパスが存在することを紹介する。

はじめに非整数 Brown 運動を復習する。実数値の確率過程 $B = \{B(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ が非整数 Brown 運動であるとは、 B が平均 0 の連続なパスを持つ確率過程であり、共分散関数が

$$E[B(s)B(t)] = R_H(s, t) := \frac{c_H^2}{2} \{|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H}\} \quad (s, t \in \mathbf{R})$$

と与えられることをいう。ここで $0 < H < 1$ は Hurst 定数とよばれる定数、 c_H は $c_H^2 = \frac{2\pi}{\Gamma(2H+1)\sin \pi H}$ を満たす正の定数である。定数 c_H は本講演の主役である多重非整数 Brown 運動との整合性のために導入した。

次に多重非整数 Brown 運動 (multifractional Brownian motion, mBm) を説明する。この確率過程は Hurst 定数を時間の関数 $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ に置き換えたものとして Peltier–Lévy Véhel [3] や Benassi–Jaffard–Roux [2] によって導入されたことが起源である。多重非整数 Brown 運動を Ayache [1] に従って導入する。まず、 $\hat{\mathbb{W}}$ は orthogonally scattered random measure, 関数 $K: \mathbf{R} \times (0, 1) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbf{R}$ を $K(u, v, \xi) = \frac{e^{\sqrt{-1}u\xi} - 1}{|\xi|^{v+1/2}}$ と定義する。次に Gauss 場 $X = \{X(u, v)\}_{(u,v) \in \mathbf{R} \times (0,1)}$ を

$$X(u, v) = \int_{\mathbf{R}} K(u, v, \xi) d\hat{\mathbb{W}}(\xi)$$

と定める (正確には連続な変形をとる)。すると $E[X(u, v)X(u', v)] = R_v(u, u')$ となり、 X が非整数 Brown 運動のひとつの実現であることが分かる。

定義 1. (非確率的な) 関数 $h: \mathbf{R} \rightarrow (0, 1)$ は C^1 級とする。確率過程 $B = \{B(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ を $B(t) = X(t, h(t))$ と定める。この B を 1 次元多重非整数 Brown 運動、 h を Hurst 関数とよぶ。また $\mathbf{R}^d$ 値の確率過程が d 次元多重非整数 Brown 運動であるとは、各成分が 1 次元多重非整数 Brown 運動であることをいう。

注意 2. (1) 1 次元多重非整数 Brown 運動 B の共分散関数は $E[B(s)B(t)] = R_{\frac{h(s)+h(t)}{2}}(s, t)$ である。

(2) d 次元多重非整数 Brown 運動の各成分の Hurst 関数は同一のものである必要はない。

続いて d 次元多重非整数 Brown 運動のラフパスへのリフトを考える。1 次元多重非整数 Brown 運動 B の Lemarié-Meyer 直交ウェーブレット基底を用いた分解から始めよう。関数 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ は、Fourier 変換 $\hat{\psi}$ が C^∞ 級かつコンパクトな台を持ち、原点近傍で 0 をとり、

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sqrt{-1}\frac{\xi}{2}} \begin{cases} \sin \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} |\xi| - 1 \right) \right], & \frac{2}{3}\pi \leq |\xi| \leq \frac{4}{3}\pi, \\ \cos \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{4\pi} |\xi| - 1 \right) \right], & \frac{4}{3}\pi \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}\pi, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

* E-mail: naganuma@kumamoto-u.ac.jp

を満たすとする。ただし、 $\nu: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ は、 C^∞ 級であり、

$$\nu(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ 1, & \xi \geq 1, \end{cases} \quad \nu(\xi) + \nu(1 - \xi) = 1 \quad (\xi \in \mathbf{R})$$

を満たす。そして、Lemarié-Meyer 直交ウェーブレット基底 $\{\psi_{jk}\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$ を $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ と定める。この基底を用いて標準正規分布に従う確率変数列 $\{\varepsilon_{jk}\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$ と関数 $\Psi: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\varepsilon_{jk} = \int_{\mathbf{R}} \overline{\hat{\psi}_{j,k}(\xi)} d\hat{\mathbb{W}}(\xi), \quad \Psi(y, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}y\eta} \frac{\hat{\psi}(\eta)}{|\eta|^{v+1/2}} d\eta$$

と定める。すると次が成り立つ。

$$X(u, v) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} 2^{-jv} \varepsilon_{jk} \{\Psi(2^j u - k, v) - \Psi(-k, v)\} \quad \text{a.s.}$$

なお、右辺は確率 1 で (u, v) に関して $\mathbf{R} \times (0, 1)$ 上でコンパクト一様収束する ([1, Theorem 5.5]). さらに、

$$X^{\text{hf}}(u, v) = \sum_{j \geq 1} \sum_{k \in \mathbf{Z}} 2^{-jv} \varepsilon_{jk} \{\Psi(2^j u - k, v) - \Psi(-k, v)\},$$

$$X^{\text{lf}}(u, v) = \sum_{j \leq 0} \sum_{k \in \mathbf{Z}} 2^{-jv} \varepsilon_{jk} \{\Psi(2^j u - k, v) - \Psi(-k, v)\},$$

$$X_+^{\text{hf}}(u, v) = \sum_{j \geq 1} \sum_{k \in \mathbf{Z}} 2^{-jv} \varepsilon_{jk} \Psi(2^j u - k, v), \quad X_-^{\text{hf}}(u, v) = - \sum_{j \geq 1} \sum_{k \in \mathbf{Z}} 2^{-jv} \varepsilon_{jk} \Psi(-k, v)$$

と定める。すると $X(u, v) = X^{\text{hf}}(u, v) + X^{\text{lf}}(u, v) = X_+^{\text{hf}}(u, v) + X_-^{\text{hf}}(u, v) + X^{\text{lf}}(u, v)$ が成り立ち、 $X_-^{\text{hf}}(u, v)$ と $X^{\text{lf}}(u, v)$ は u と v について滑らかな確率過程である。最後に次を定める。

$$B_+^{\text{hf}}(t) = X_+^{\text{hf}}(t, h(t)), \quad B_-^{\text{hf}}(t) = X_-^{\text{hf}}(t, h(t)), \quad B^{\text{lf}}(t) = X^{\text{lf}}(t, h(t)).$$

すると、 $B(t) = B_+^{\text{hf}}(t) + B_-^{\text{hf}}(t) + B^{\text{lf}}(t)$ が成り立ち、 $B_-^{\text{hf}}(t)$ と $B^{\text{lf}}(t)$ は t について滑らかな確率過程である。

最後に結果を述べる。時間区間を $I = [0, T]$ ($T > 0$) に制限した 1 次元多重非整数 Brown 運動 $B = \{B(t)\}_{t \in I}$ を考える。Hurst 関数を h と記し、 $\lambda_* = \lambda_*(I) = \inf_{t \in I} h(t)$ と定める。次が鍵となる補題である。

補題 3. $\frac{1}{4} < \lambda_* \leq \frac{1}{2}$ を仮定する。 $\frac{1}{4} < \lambda < \lambda_*$ をとる。Gauss 過程 $B_+^{\text{hf}} = \{B_+^{\text{hf}}(t)\}_{t \in I}$ は、 λ に対して Coutin-Qian の条件を満たす。

d 次元多重非整数 Brown 運動 B に対して、 B_+^{hf} , B_-^{hf} , B^{lf} を成分ごとに定める。 B の各成分の Hurst 関数は補題の条件を満たすと仮定する。すると、補題より B_+^{hf} に付随するラフパスが存在する。さらに B_-^{hf} と B^{lf} は t について滑らかであった。よってラフパスの並行移動を考えることにより次の結果を得る。

定理 4. d 次元多重非整数 Brown 運動 B に付随するラフパスが存在する。

参考文献

- [1] Antoine Ayache. *Multifractional stochastic fields*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2019.
- [2] Albert Benassi, Stéphane Jaffard, and Daniel Roux. Elliptic Gaussian random processes. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 13(1):19–90, 1997.
- [3] Romain-François Peltier and Jacques Lévy Véhel. Multifractional Brownian motion: Definition and preliminary results. 1995.