De Rham–Hodge–Kodaira decomposition for tamed Dirichlet space by signed measured curvature lower bounds

桑江一洋 (福岡大学)

1 被制御ディリクレ空間

M を位相的 Lusin 空間で $\mathscr{B}(M)=\sigma(C(M))$ を仮定する．$\mathfrak{m}$ を M 上の Radon 測度で台が全体とする．$L^2(M;\mathfrak{m})$ 上のディリクレ形式 $(\mathscr{E},D(\mathscr{E}))$ と対応する $L^2(M;\mathfrak{m})$-半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ を考え，$(\mathscr{E},D(\mathscr{E}))$ が準正則で carré-du-champ $\Gamma(u)$ を許容するとする．このとき，$(\mathscr{E},D(\mathscr{E}))$ に基づいて $\mathfrak{m}$-a.e. の意味で一階の微分構造がはいる．特に **L^2-ベクトル場の全体 $L^2(TM)$**, **L^2-1-微分形式の全体 $L^2(T^*M)$**, それらの (ヒルベルト空間の意味ではなく L^∞-加群の意味での) **テンソル積 $L^2(T^{k\otimes}M):=L^2(T^{(k-1)\otimes}M)\otimes L^2(TM)$, $L^2((T^*)^{k\otimes}M):=L^2((T^*)^{(k-1)\otimes}M)\otimes L^2(T^*M)$**, **外積冪 $L^2(\Lambda^kTM):=\Lambda^kL^2(TM)$, $L^2(\Lambda^kT^*M):=\Lambda^kL^2T^*M)$** などが [1, 4] によって定式化された．特に $f\in D(\mathscr{E})$ に対して，その**微分 $\mathrm{d}f\in L^2(T^*M)$**, **勾配ベクトル場 $\nabla f\in L^2(TM)$** がそれぞれ定義できる．

$\mathbf{X}=(\Omega,X_t,\mathbf{P}_x)$ を $(\mathscr{E},D(\mathscr{E}))$ に対応する標準過程，$S_D(\mathbf{X})$ を滑らかな Dynkin class 測度の全体，$S_{EK}(\mathbf{X})$ を滑らかな拡張された加藤 class 測度の全体とする．$(\Delta,D(\Delta))$ を $(\mathscr{E},D(\mathscr{E}))$ に対応する L^2-生成作用素，$(\Delta^{2\kappa},D(\Delta^{2\kappa}))$ をシュレディンガー形式 $(\mathscr{E}^{2\kappa},D(\mathscr{E}))$ に対応する L^2-生成作用素とする．Δ は具体例において必ずしもラプラシアンとは限らない (Wiener 空間では Ornstein–Uhlenbeck 作用素，重み付き Riemann 多様体 $(M,g,e^{-f}\mathrm{vol}_g)$ では重み付きラプラシアン $\Delta_f:=\Delta-\langle\nabla f,\nabla\cdot\rangle$ になる).

定義 1.1 (**Bakry–Émery 条件**). $\kappa^+\in S_D(\mathbf{X})$, $2\kappa^-\in S_{EK}(\mathbf{X})$ とする．$(M,\mathscr{E},\mathfrak{m})$ または単に M が 2-Bakry–Émery 条件 ($\mathsf{BE}_2(\kappa,\infty)$ と記す) を満たすとは以下のこととする: 任意の $\Delta f\in D(\mathscr{E})$ を満たす $f\in D(\Delta)$ と $\Delta^{2\kappa}\phi\in L^\infty(M;\mathfrak{m})$ を満たす非負 $\phi\in D(\Delta^{2\kappa})\cap L^\infty(M;\mathfrak{m})$ に対し

$$\frac{1}{2}\int_M\Delta^{2\kappa}\phi|\nabla f|^2\mathrm{d}\mathfrak{m}\geq\int_M\phi\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

仮定 1.2. 符号値測度 κ が $\kappa^+\in S_D(\mathbf{X})$ と $2\kappa^-\in S_{EK}(\mathbf{X})$ を満たし，M が $\mathsf{BE}_2(\kappa,\infty)$ を満たす．

仮定 1.2 が成立するとき，$(M,\mathscr{E},\mathfrak{m})$ あるいは単に M を**被制御 (tamed)** と呼ぶ．さらに，$\mathsf{BE}_2(\kappa,\infty)$ は半群の勾配評価と呼ばれる $\mathsf{GE}_1(\kappa,\infty)$ という次の条件

$$|\nabla(P_tf)|\leq P_t^\kappa|\nabla f|\quad \mathfrak{m}\text{-a.e. for any } f\in D(\mathscr{E})\quad\text{and}\quad t\geq 0 \tag{1.1}$$

とも同値である ([2, Theorems 3.4 and 3.6, Proposition 3.7 and Theorem 6.10, Definition 3.3 and Theorem 3.4])．試験関数の集合を

$$\mathrm{Test}(M):=\{f\in D(\Delta)\cap L^\infty(M;\mathfrak{m})\mid|\nabla f|\in L^\infty(M;\mathfrak{m}),\Delta f\in D(\mathscr{E})\}$$

で定める． [2, Proposition 6.8] より，仮定 1.2 の下で，$\mathsf{BE}_2(-\kappa^-,\infty)$ が成立する． さらに，任意の $f\in L^2(M;\mathfrak{m})\cap L^\infty(M;\mathfrak{m})$ と $t>0$ に対して，

$$|\nabla P_tf|^2\leq\frac{1}{2t}\|P_t^{-2\kappa^-}\|_{\infty,\infty}\cdot\|f\|^2_{L^\infty(M;\mathfrak{m})} \tag{1.2}$$

が成立する．特に $f \in L^2(M;\mathfrak{m}) \cap L^\infty(M;\mathfrak{m})$ なら，$P_t f \in \mathrm{Test}(M)$ となる．[2, Lemma 6.4] より $\mathrm{Test}(M)$ は**代数 (algebra)** になる：$f, g \in \mathrm{Test}(M)$ ならば $fg \in \mathrm{Test}(M)$.

仮定 1.2 の下で，$\mathrm{Test}(M)$ はリーマン多様体 M における $C_c^\infty(M)$ の代用物の役割を果たす．さらに $\mathfrak{m}$-a.e. の意味で二階の微分構造がはいる．例えば，ソボレフ空間としての**ヘシアン (Hess, $D(\mathrm{Hess})$) の概念，ソボレフ空間 $W^{1,2}(TM)$，$H^{1,2}(TM) := \overline{\mathrm{Reg}(TM)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}}}$，$\mathrm{Reg}(TM) := \{\sum_{i=0}^n g_i \nabla f_i \mid \exists n \in \mathbb{N}, f_i \in \mathrm{Test}(M), g_i \in \mathrm{Test}(M) \cup \mathbb{R}1_M (0 \le i \le n)\}$，$H^{1,2}(TM)$ に対応する Bochner Laplacian $\square$，L^2-k-微分形式 $\omega \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ に作用するソボレフ空間としての外微分作用素 $(\mathrm{d}^k, D(\mathrm{d}^k))$ と余外微分作用素 $(\mathrm{d}_*^k, D(\mathrm{d}_*^k))$，ソボレフ空間 $W^{1,2}(\Lambda^k T^*M) := D(\mathrm{d}^k) \cap D(\mathrm{d}_*^k)$，$H^{1,2}(\Lambda^k T^*M) := \overline{\mathrm{Reg}(\Lambda^k T^*M)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}}}$，$\mathrm{Reg}(\Lambda^k T^*M) := \{\sum_{i=0}^n f_i^0 \mathrm{d} f_i^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} f_i^k \mid \exists n \in \mathbb{N}, f_i^j \in \mathrm{Test}(M)\ (1 \le j \le k), f_i^0 \in \mathrm{Test}(M) \cup \mathbb{R}1_M (0 \le i \le n)\}$，$H^{1,2}(\Lambda^k T^*M)$ に対応する L^2-生成作用素としての De Rham–Hodge–Kodaira Laplacian $-\Delta_k^{\mathrm{HK}}$ (= "$\mathrm{d}^{k-1}\mathrm{d}_*^k + \mathrm{d}_*^{k+1}\mathrm{d}^k)\omega$")** などが定義できる．$k=0$ のとき $\Delta_0^{\mathrm{HK}} = \Delta$ に注意する．以下，外微分，余外微分から添字 $k, k\pm 1$ 等を略す．$(P_t^{\mathrm{HK}})_{t\ge 0}$ を Δ_k^{HK} に対応する $L^2(\Lambda^k T^*M)$ 上の強連続縮小半群とする．形式的には $P_t^{\mathrm{HK}}\omega$(="$e^{t\Delta_k^{\mathrm{HK}}}\omega$") である．

定理 1.3 (**L^2-de Rham–Hodge–Kodaira 分解**)**.** $\Delta_k^{\mathrm{HK}}|_{\mathrm{Reg}(\Lambda^k T^*M))}$ が $L^2(\Lambda^k T^*M)$ 上本質的自己共役，$1 \in D(\mathscr{E})$，$\mathscr{E}(1,1) = 0$ か，M が局所コンパクトで内在距離で完備かつ $\mathbf{X}$ を Feller 過程とする．

(1) $\omega \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ に対して，調和射影 $H\omega := \lim_{N\to\infty} P_N^{\mathrm{HK}}\omega$ in $L^2(\Lambda^k T^*M)$ が存在する．

(2) $\omega \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ に対して，以下の特異積分が $L^2(\Lambda^k T^*M)$ での収束の意味で存在する：

$$\mathrm{d}\mathrm{d}_*(-\Delta_k^{\mathrm{HK}})^{-1}\omega := \lim_{N\to\infty}\int_0^N \mathrm{d}\mathrm{d}_* P_t^{\mathrm{HK}}\omega\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}_*\mathrm{d}(-\Delta_k^{\mathrm{HK}})^{-1}\omega := \lim_{N\to\infty}\int_0^N \mathrm{d}_*\mathrm{d} P_t^{\mathrm{HK}}\omega\,\mathrm{d}t.$$

(3) L^2-de Rham–Hodge–Kodaira 直交分解が成立する：$\omega \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ に対し

$$\omega = H\omega + \mathrm{d}\mathrm{d}_*(-\Delta_k^{\mathrm{HK}})^{-1}\omega + \mathrm{d}_*\mathrm{d}(-\Delta_k^{\mathrm{HK}})^{-1}\omega,$$
$$\|\omega\|^2_{L^2(\Lambda^k T^*M)} = \|H\omega\|^2_{L^2(\Lambda^k T^*M)} + \|\mathrm{d}\mathrm{d}_*(-\Delta_k^{\mathrm{HK}})^{-1}\omega\|^2_{L^2(\Lambda^k T^*M)} + \|\mathrm{d}_*\mathrm{d}(-\Delta_k^{\mathrm{HK}})^{-1}\omega\|^2_{L^2(\Lambda^k T^*M)}.$$

参考文献

[1] M. Braun, *Vector calculus for tamed Dirichlet spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **303** (2024), no. 1522.

[2] M. Erbar, C. Rigoni, K.-T. Sturm and L. Tamanini, *Tamed spaces — Dirichlet spaces with distribution-valued Ricci bounds*, J. Math. Pures Appl. (9) **161** (2022), 1–69.

[3] S. Esaki, K. Kuwae and Z. Xu, *Riesz transforms for Dirichlet spaces tamed by signed measured curvature lower bounds*, (2023) preprint, `arXiv:2308.12728v2`

[4] N. Gigli, *Nonsmooth Differential Geometry–An Approach Tailored for Spaces with Ricci Curvature Bounded from Below*, Mem. Amer. Math. Soc. **251** (2018), no. 1196.

[5] K. Kuwae, *De Rham–Hodge–Kodaira decomposition for tamed Dirichlet space by signed measured curvature lower bounds*, in preparation, 2025.

[6] X.-D. Li, *On the weak L^p-Hodge decomposition and Beurling–Ahlfors transforms on complete Riemannian manifolds*, Probab. Theory Relat. Fields **150** (2011), no. 1-2, 111–144.

[7] I. Shigekawa, *De Rham–Hodge–Kodaira's decomposition on an abstract Wiener space*, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), no. 2, 191–202.