

De Rham–Hodge–Kodaira decomposition for tamed Dirichlet space by signed measured curvature lower bounds

桑江一洋 (福岡大学)

1 被制御ディリクレ空間

M を位相的 Lusin 空間で $\mathcal{B}(M) = \sigma(C(M))$ を仮定する. $\mathbf{m}$ を M 上の Radon 測度で台が全体とする. $L^2(M; \mathbf{m})$ 上のディリクレ形式 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ と対応する $L^2(M; \mathbf{m})$ -半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ を考え, $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ が準正則で carré-du-champ $\Gamma(u)$ を許容するとする. このとき, $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ に基づいて $\mathbf{m}$ -a.e. の意味で一階の微分構造がはいる. 特に L^2 -ベクトル場の全体 $L^2(TM)$, L^2 -1-微分形式の全体 $L^2(T^*M)$, それらの (ヒルベルト空間の意味ではなく L^∞ -加群の意味での) テンソル積 $L^2(T^{k \otimes} M) := L^2(T^{(k-1) \otimes} M) \otimes L^2(TM)$, $L^2((T^*)^k M) := L^2((T^*)^{(k-1) \otimes} M) \otimes L^2(T^*M)$, 外積 $L^2(\Lambda^k TM) := \Lambda^k L^2(TM)$, $L^2(\Lambda^k T^*M) := \Lambda^k L^2 T^*M$ などが [1, 4] によって定式化された. 特に $f \in D(\mathcal{E})$ に対して, その微分 $df \in L^2(T^*M)$, 勾配ベクトル場 $\nabla f \in L^2(TM)$ がそれぞれ定義できる.

$\mathbf{X} = (\Omega, X_t, \mathbf{P}_x)$ を $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ に対応する標準過程, $S_D(\mathbf{X})$ を滑らかな Dynkin class 測度の全体, $S_{EK}(\mathbf{X})$ を滑らかな拡張された加藤 class 測度の全体とする. $(\Delta, D(\Delta))$ を $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ に対応する L^2 -生成作用素, $(\Delta^{2\kappa}, D(\Delta^{2\kappa}))$ をシュレディンガー形式 $(\mathcal{E}^{2\kappa}, D(\mathcal{E}))$ に対応する L^2 -生成作用素とする. Δ は具体例において必ずしもラプラシアンとは限らない (Wiener 空間では Ornstein–Uhlenbeck 作用素, 重み付き Riemann 多様体 $(M, g, e^{-f} \text{vol}_g)$ では重み付きラプラシアン $\Delta_f := \Delta - \langle \nabla f, \nabla \cdot \rangle$ になる).

定義 1.1 (Bakry–Émery 条件). $\kappa^+ \in S_D(\mathbf{X})$, $2\kappa^- \in S_{EK}(\mathbf{X})$ とする. $(M, \mathcal{E}, \mathbf{m})$ または単に M が 2-Bakry–Émery 条件 $(\text{BE}_2(\kappa, \infty))$ と記すを満たすとは以下のこととする: 任意の $\Delta f \in D(\mathcal{E})$ を満たす $f \in D(\Delta)$ と $\Delta^{2\kappa} \phi \in L^\infty(M; \mathbf{m})$ を満たす非負 $\phi \in D(\Delta^{2\kappa}) \cap L^\infty(M; \mathbf{m})$ に対し

$$\frac{1}{2} \int_M \Delta^{2\kappa} \phi |\nabla f|^2 d\mathbf{m} \geq \int_M \phi \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle d\mathbf{m}.$$

仮定 1.2. 符号値測度 κ が $\kappa^+ \in S_D(\mathbf{X})$ と $2\kappa^- \in S_{EK}(\mathbf{X})$ を満たし, M が $\text{BE}_2(\kappa, \infty)$ を満たす.

仮定 1.2 が成立するとき, $(M, \mathcal{E}, \mathbf{m})$ あるいは単に M を被制御 (tamed) と呼ぶ. さらに, $\text{BE}_2(\kappa, \infty)$ は半群の勾配評価と呼ばれる $\text{GE}_1(\kappa, \infty)$ という次の条件

$$|\nabla(P_t f)| \leq P_t^\kappa |\nabla f| \quad \mathbf{m}\text{-a.e. for any } f \in D(\mathcal{E}) \quad \text{and} \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

とも同値である ([2, Theorems 3.4 and 3.6, Proposition 3.7 and Theorem 6.10, Definition 3.3 and Theorem 3.4]). 試験関数の集合を

$$\text{Test}(M) := \{f \in D(\Delta) \cap L^\infty(M; \mathbf{m}) \mid |\nabla f| \in L^\infty(M; \mathbf{m}), \Delta f \in D(\mathcal{E})\}$$

で定める. [2, Proposition 6.8] より, 仮定 1.2 の下で, $\text{BE}_2(-\kappa^-, \infty)$ が成立する. さらに, 任意の $f \in L^2(M; \mathbf{m}) \cap L^\infty(M; \mathbf{m})$ と $t > 0$ に対して,

$$|\nabla P_t f|^2 \leq \frac{1}{2t} \|P_t^{-2\kappa^-}\|_{\infty, \infty} \cdot \|f\|_{L^\infty(M; \mathbf{m})}^2 \quad (1.2)$$

が成立する. 特に $f \in L^2(M; \mathfrak{m}) \cap L^\infty(M; \mathfrak{m})$ なら, $P_t f \in \text{Test}(M)$ となる. [2, Lemma 6.4] より $\text{Test}(M)$ は代数 (algebra) になる: $f, g \in \text{Test}(M)$ ならば $fg \in \text{Test}(M)$.

仮定 1.2 の下で, $\text{Test}(M)$ は古典的な枠組みにおける $C_c^\infty(M)$ の代用物の役割を果たす. さらに $\mathfrak{m}$ -a.e. の意味で二階の微分構造がはいる. 例えば, ソボレフ空間としてのヘシアン ($\text{Hess}, D(\text{Hess})$) の概念, ソボレフ空間 $W^{1,2}(TM)$, $H^{1,2}(TM) := \overline{\text{Reg}(TM)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}}}$, $\text{Reg}(TM) := \{\sum_{i=0}^n g_i \nabla f_i \mid \exists n \in \mathbb{N}, f_i \in \text{Test}(M), g_i \in \text{Test}(M) \cup \mathbb{R}1_M (0 \leq i \leq n)\}$, $H^{1,2}(TM)$ に対応する Bochner Laplacian $\square$, L^2 - k -微分形式 $\omega \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ に作用するソボレフ空間としての外微分作用素 ($d^k, D(d^k)$) と余外微分作用素 ($d_*^k, D(d_*^k)$), ソボレフ空間 $W^{1,2}(\Lambda^k T^*M) := D(d^k) \cap D(d_*^k)$, $H^{1,2}(\Lambda^k T^*M) := \overline{\text{Reg}(\Lambda^k T^*M)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}}}$, $\text{Reg}(\Lambda^k T^*M) := \{\sum_{i=0}^n f_i^0 df_i^1 \wedge \cdots \wedge df_i^k \mid \exists n \in \mathbb{N}, f_i^j \in \text{Test}(M) (1 \leq j \leq k), f_i^0 \in \text{Test}(M) \cup \mathbb{R}1_M (0 \leq i \leq n)\}$, $H^{1,2}(\Lambda^k T^*M)$ に対応する L^2 -生成作用素としての De Rham–Hodge–Kodaira Laplacian $-\Delta_k^{\text{HK}}$ ($= “d^{k-1}d_*^k + d_*^{k+1}d^k”\omega$) などが定義できる. $k=0$ のとき $\Delta_0^{\text{HK}} = \Delta$ に注意する. 以下, 外微分, 余外微分から添字 $k, k \pm 1$ 等を略す. $(P_t^{\text{HK}})_{t \geq 0}$ を Δ_k^{HK} に対応する $L^2(\Lambda^k T^*M)$ 上の強連続縮小半群とする. 形式的には $P_t^{\text{HK}}\omega (= “e^{t\Delta_k^{\text{HK}}}\omega”)$ である.

定理 1.3 (L^2 -de Rham–Hodge–Kodaira 分解). $(\Delta_k^{\text{HK}}, \text{Reg}(\Lambda^k T^*M))$ が $L^2(\Lambda^k T^*M)$ 上本質的自己共役とする.

(1) $\omega \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ に対して, 調和射影 $H\omega := \lim_{N \rightarrow \infty} P_N^{\text{HK}}\omega$ in $L^2(\Lambda^k T^*M)$ が存在する.

(2) $\omega \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ に対して, 以下の特異積分が $L^2(\Lambda^k T^*M)$ での収束の意味で存在する:

$$\text{dd}_*(-\Delta_k^{\text{HK}})^{-1}\omega := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \text{dd}_* P_t^{\text{HK}}\omega \, dt, \quad d_* d(-\Delta_k^{\text{HK}})^{-1}\omega := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N d_* d P_t^{\text{HK}}\omega \, dt.$$

(3) L^2 -de Rham–Hodge–Kodaira 直交分解が成立する: $\omega \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ に対し

$$\begin{aligned} \omega &= H\omega + \text{dd}_*(-\Delta_k^{\text{HK}})^{-1}\omega + d_* d(-\Delta_k^{\text{HK}})^{-1}\omega, \\ \|\omega\|_{L^2(\Lambda^k T^*M)}^2 &= \|H\omega\|_{L^2(\Lambda^k T^*M)}^2 + \|\text{dd}_*(-\Delta_k^{\text{HK}})^{-1}\omega\|_{L^2(\Lambda^k T^*M)}^2 + \|d_* d(-\Delta_k^{\text{HK}})^{-1}\omega\|_{L^2(\Lambda^k T^*M)}^2. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] M. Braun, *Vector calculus for tamed Dirichlet spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **303** (2024), no. 1522.
- [2] M. Erbar, C. Rigoni, K.-T. Sturm and L. Tamanini, *Tamed spaces — Dirichlet spaces with distribution-valued Ricci bounds*, J. Math. Pures Appl. (9) **161** (2022), 1–69.
- [3] S. Esaki, K. Kuwae and Z. Xu, *Riesz transforms for Dirichlet spaces tamed by signed measured curvature lower bounds*, (2023) preprint, arXiv:2308.12728v2
- [4] N. Gigli, *Nonsmooth Differential Geometry—An Approach Tailored for Spaces with Ricci Curvature Bounded from Below*, Mem. Amer. Math. Soc. **251** (2018), no. 1196.
- [5] K. Kuwae, *De Rham–Hodge–Kodaira decomposition for tamed Dirichlet space by signed measured curvature lower bounds*, in preparation, 2025.
- [6] X.-D. Li, *On the weak L^p -Hodge decomposition and Beurling–Ahlfors transforms on complete Riemannian manifolds*, Probab. Theory Relat. Fields **150** (2011), no. 1-2, 111–144.
- [7] I. Shigekawa, *De Rham–Hodge–Kodaira’s decomposition on an abstract Wiener space*, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), no. 2, 191–202.