

Ergodicity for Markovian lifts of stochastic Volterra equations

濱口 雄史 (京都大学大学院理学研究科)

概要

次の確率 Volterra 方程式 (stochastic Volterra equation; SVE) を考える:

$$X_t = x(t) + \int_0^t K(t-s)b(X_s)ds + \int_0^t K(t-s)\sigma(X_s)dW_s, \quad t > 0. \quad (1)$$

ただし, W は d 次元 Brown 運動, $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ はドリフト係数, $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ は拡散係数であり, $K: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は核, $x: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ は外力項と呼ばれる関数である. SVE の解 X は一般に非 Markov かつ非セミマルチンゲールであるような (有限次元) 確率過程であるが, 無限次元空間への持ち上げを考えることで, ある Hilbert 空間上の Markov 過程 (Markov リフト) が得られる. また, 元の SVE の解は, この Markov リフトのある種の射影として復元できる. 本研究の目的は, Markov リフトの長時間漸近挙動を調べることで, 元の SVE の解 X に関する極限定理を得ることである.

Markov リフト

核 K が完全単調であると仮定する. このとき, $\mathbb{R}_+$ 上のある Borel 測度 μ が一意的に存在し, $K(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\theta t} \mu(d\theta)$ と表現される. この測度 μ に着目し, 次の確率発展方程式 (stochastic evolution equation; SEE) を考える:

$$\begin{cases} dY_t(\theta) = -\theta Y_t(\theta) dt + b(\mu[Y_t]) dt + \sigma(\mu[Y_t]) dW_t, & t \geq 0, \theta \in \mathbb{R}_+, \\ Y_0(\theta) = y(\theta), & \theta \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (2)$$

ただし, $\mu[Y_t] := \int_{\mathbb{R}_+} Y_t(\theta) \mu(d\theta)$ である. この SEE は θ の関数からなる適切な Hilbert 空間の三つ組み $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$ の上で定義される. 自然な条件の下, SEE(2) の解 Y は $\mathcal{H}$ 上の時間斉次的 Markov (Feller) 過程となり, SVE(1) の解 X は表現公式

$$X_t = \mu[Y_t], \quad t \geq 0$$

によって復元される [2]. SEE(2) の解 Y を X の Markov リフトと呼ぶ.

SEE(2) に対応する推移確率は

$$P_t(y, A) := \mathbb{P}(Y_t^y \in A), \quad t \geq 0, y \in \mathcal{H}, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

と定義される. ただし, Y^y は初期条件を y としたときの SEE(2) の解である. $\mathcal{H}$ 上の確率測度 π が

$$\int_{\mathcal{H}} P_t(y, A) \pi(dy) = \pi(A), \quad \forall t \geq 0, \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

を満たすとき, π を $\{P_t\}_{t \geq 0}$ の不変確率測度という. 先行研究 [2] では, 適切な条件の下で不変確率測度の一意性が得られていた. 本講演では, 不変確率測度の一意存在性および弱エルゴード評価について得られた結果を紹介する.

主結果

以下を仮定する:

- 核 K は完全単調であり, $\int_0^1 K(t)^2 dt < \infty$ を満たす. さらに, ある $\beta > 0$ が存在し, $\limsup_{t \rightarrow \infty} e^{\beta t} K(t) < \infty$ が成立する.
- 係数 $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は Lipschitz 連続である. さらに, $C_1 \|K\|_{L^1(0, \infty)} < 1$ なるある定数 $C_1 > 0$ および $C_2 > 0$ が存在し, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle x, b(x) \rangle \leq C_1 |x|^2 + C_2$ が成立する.
- 係数 $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ は有界かつ Lipschitz 連続である. さらに, ある定数 $C_3 > 0$ が存在し, 任意の $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle \sigma(x) \sigma(x)^\top \xi, \xi \rangle \geq C_3 |\xi|^2$ が成立する.

ここで, b と σ の Lipschitz 定数の大きさについては何の制限も課していないことに注意されたい. 以上の仮定の下, 次の結果を得た:

- (不変確率測度の一意存在性) $\{P_t\}_{t \geq 0}$ の不変確率測度 π が一意的に存在する.
- (可積分性) 任意の $p \geq 0$ に対して $\int_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}}^p \|y\|_{\mathcal{V}}^2 \pi(dy) < \infty$ が成立する. 特に $\pi(\mathcal{V}) = 1$ である.
- (指数型弱エルゴード評価) ある $C, r > 0$ が存在し, 任意の $y \in \mathcal{H}$ および $t \geq 0$ に対して

$$\mathbb{W}(P_t(y, \cdot), \pi) \leq C(1 + \|y\|_{\mathcal{H}})e^{-rt}$$

が成立する. ここで, $\mathbb{W}$ は $\mathcal{H}$ 上の確率測度全体の空間 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ の上の (弱収束と同値な) 距離であり, 次で定義される:

$$\mathbb{W}(p_1, p_2) := \inf_{p \in \mathcal{C}(p_1, p_2)} \int_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} \left\{ \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{H}} \wedge 1 \right\} p(dy_1, dy_2), \quad p_1, p_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{H}).$$

また, $\mathcal{C}(p_1, p_2)$ は p_1 と p_2 のカップリング全体の集合を表す.

上述の主結果は, Lyapunov 関数を上手く構成し, Hairer, Mattingly and Scheutzow [1] によって示された一般化 Harris の定理を適用することで証明される. そのうえでの大きな難点は, SEE(2) が退化型であること, すなわち状態空間 $\mathcal{H}$ は無限次元であるが, ノイズを駆動する Brown 運動は有限次元であるという点である. 本研究では, SEE(2) の特殊な構造に着目した「一般化カップリング」を適切に構成することで, この難点を解決した.

本講演では, 上述の主結果と証明のアイデアについてより詳しく説明する.

参考文献

- [1] M. Hairer, J.C. Mattingly, and M. Scheutzow, Asymptotic coupling and a general form of Harris' theorem with applications to stochastic delay equations, *Probab. Theory Related Fields* 149, 223–259, 2011.
- [2] Y. Hamaguchi, Markovian lifting and asymptotic log-Harnack inequality for stochastic Volterra integral equations, *Stochastic Process. Appl.* 178, 104482, 2024.