

1 次元 fractional SDE の数値解の漸近展開とその応用

東京大学数理科学研究科 植田健人

2024/12/04

1 fractional SDE

本講演では、非整数ブラウン運動 (fractional Brownian motion: fBm) で駆動される確率微分方程式 (fractional SDE: fSDE) とその数値解法に対する漸近展開と、その数値計算への応用を紹介する。

まず、fBm はパラメータ $H \in (0, 1)$ を持つ非マルコフなガウス過程の一種であり、次の共分散によって分布が特徴づけられる。

$$\text{Cov}^B(s, t) = E[B_s B_t] = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

このとき、ブラウン運動に代わって fBm で駆動される SDE

$$dY_t = \sigma(Y_t)dB_t + b(Y_t)dt$$

を考える。この SDE は B が一般次元の場合においてラフパス (Rough path) 理論と呼ばれる方法で定式化される。[3] [2] [1]

これらのモデルを応用する際、必要な情報の多くは解のサンプルパスに対する特定の汎関数の期待値として表される。ブラック=ショールズ方程式のように、一部のモデルでは解を陽的に書き表すことができ、さらにそれを使って汎関数の期待値を計算できることがある。そのような場合には計算した期待値を直接用いればよいが、一般的には SDE の解を陽的に表すことは困難である。そのため、何らかの方法で必要なだけの精度の近似値を求め、それを期待値の代わりに用いる。

2 数値解法

SDE の解の汎関数の数値計算の手法は必ずしも一意ではないが、本研究ではそのうちサンプルパスに対する差分法を取り扱う。差分法は小区間ごとの逐次近似によって解を構成する数値解法の総称であり、fSDE に対しては次の 3 つが典型的である。

$r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 、 $\tau_r^m = 2^{-m}r$ 、 $\delta B_{s,t} = B_t - B_s$ として、

- the Euler-Maruyama scheme

$$\hat{Y}_t^{(m)} = \begin{cases} \hat{Y}_{\tau_r^m}^{(m)} + \sigma(\hat{Y}_{\tau_r^m}^{(m)})\delta B_{\tau_r^m, t} + b(\hat{Y}_{\tau_r^m}^{(m)})(t - \tau_r^m), & \tau_r^m < t \leq \tau_{r+1}^m \\ Y_0, & t = 0, \end{cases} \quad (1)$$

- the (k)-Milstein scheme((k)-Taylor scheme)

$$\hat{Y}_t^{(m)} = \begin{cases} \hat{Y}_{\tau_r^m}^{(m)} + \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \mathcal{D}^{l-1} \sigma(\hat{Y}_{\tau_r^m}^{(m)}) (\delta B_{\tau_r^m, t})^l + b(\hat{Y}_{\tau_r^m}^{(m)}) (t - \tau_r^m) \\ + \frac{1}{2} b b' (\hat{Y}_{\tau_r^m}^{(m)}) (t - \tau_r^m)^2 + \frac{1}{2} (\sigma' b + b' \sigma) (\hat{Y}_{\tau_r^m}^{(m)}) (t - \tau_r^m) \delta B_{\tau_r^m, t} & \tau_r^m < t \leq \tau_{r+1}^m \\ Y_0 & t = 0 \end{cases} \quad (2)$$

- the Crank-Nicolson scheme

$$\hat{Y}_t^{(m)} = \begin{cases} \hat{Y}_{\tau_r^m}^{(m)} + \frac{1}{2} (\sigma(\hat{Y}_{\tau_r^m}^{(m)}) + \sigma(\hat{Y}_t^{(m)})) \delta B_{\tau_r^m, t} \\ + \frac{1}{2} (b(\hat{Y}_{\tau_r^m}^{(m)}) + b(\hat{Y}_t^{(m)})) (t - \tau_r^m). & \tau_r^m < t \leq \tau_{r+1}^m \\ Y_0 & t = 0 \end{cases} \quad (3)$$

なお、本研究では小区間の大きさを 2^{-m} としたが刻み幅は任意である。

これらの差分法は確率過程のサンプルパスから解のサンプルパスを得る手法であり、実際に期待値を計算する上では先にサンプルパスを離散時刻における値の組として複数生成し、また生成した数値解から汎関数を得る手続きが必要になる。

3 漸近展開と応用

このとき、数値解法の性能尺度の一つに収束率がある。これは真の解と数値解の誤差のオーダーを刻み幅もしくはそのパラメータを変数として表したものであり、例えばオイラー・丸山法であれば $H > 1/2$ のときパス毎、かつ L^2 の意味で $2^{-m(H-1/2)}$ の収束率を持つ。さらに、誤差をより詳しく評価することで、誤差に対する極限定理 (漸近誤差) を導出することができる。[4] このような極限定理の収束先には大数の法則のように概収束するものと中心極限定理のように分布収束のみする場合が存在する。

漸近誤差は通常の極限定理の範疇に属するが、導出した極限の情報を用いて数値解の精度を向上させることができる。そのための手法として、収束の加速と時刻刻み幅の自動調節を紹介する。これらは二つとも常微分方程式 (ODE) において成功を収めた手法であり、ODE の漸近誤差を用いて正当化することができる。一方で、SDE や fSDE に対しても、ODE の場合にはない制限を受けるものの、その制限のもとでは ODE と同様に手法を適用し、数値解の精度を向上させることができる。

本講演では、fSDE とその数値解法、および漸近極限に関して紹介し、また漸近極限が数値解法の精度を向上させることを確認する。特に、実際の数値計算におけるアルゴリズムに関して重点的に解説を行う。

参考文献

- [1] A. M. Davie. Differential equations driven by rough paths: an approach via discrete approximation. *Appl. Math. Res. Express. AMRX*, pages Art. ID abm009, 40, 2008. [Issue information previously given as no. 2 (2007)].
- [2] M. Gubinelli. Controlling rough paths. *J. Funct. Anal.*, 216(1):86–140, 2004.
- [3] Terry J. Lyons. Differential equations driven by rough signals. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 14(2):215–310, 1998.
- [4] U. Error distribution for one-dimensional stochastic differential equation driven by fractional brownian motion. *arXiv:2309.13897*.