Construction of diffusion house-moving

西野　颯馬　(東京都立大学)*

1 Introduction

拡散引越過程 (diffusion house-moving) とは，サンプルパスが 2 曲線 $g^- < g^+$ の間を動き，時刻 0 で $g^-(0)$ を出発し時刻 1 で $g^+(1)$ に到達する拡散過程である．Brown 運動に対応する拡散引越過程 (Brown 引越過程と呼ばれる) は既に [1] で構成されており，本研究では一般の拡散過程に対する構成方法を与えた．本研究で扱う拡散過程 X は，次の SDE に従う連続確率過程である：

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t$$

ここで，$\mu \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ であり，$W = \{W_t\}_t$ は標準 1 次元 Brown 運動である．なお，ドリフト係数が $b \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ であり，拡散係数が $\sigma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{>0})$ である SDE

$$\mathrm{d}U_t = b(U_t)\mathrm{d}t + \sigma(U_t)\mathrm{d}W_t$$

に従う拡散過程 U に対しては，適切な狭義単調増加関数 F を用いて $X_t = F(U_t)$ と表せるため，本研究では拡散過程 X のみを扱えば十分である．拡散引越過程の構成方法は，時刻 0 で $g^-(0)$ を出発する拡散過程 X を時刻 1 で $g^+(1)$ に到達するようにした X-bridge に対して，これを 2 曲線 $g^- - \eta^-(\varepsilon) < g^+ + \eta^+(\varepsilon)$ の間に条件付けて，$\eta^\pm(\varepsilon) \downarrow 0$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ による弱収束極限として構成するものである．詳細は次ページの主結果で述べる．主結果を記述するために次の記号を導入する：

定義 1. $w \in C([s,t], \mathbb{R})$ に対して

$$N_{[s,t]}(w) := \int_s^t \left\{ \mu'(w(u)) + \mu^2(w(u)) \right\} \mathrm{d}u$$

と定める．さらに，$C([0,1], \mathbb{R})$ 上の $\mathbb{R}$ 値有界連続関数 G に対して

$$\widehat{G}(w) := e^{-\frac{1}{2}N_{[0,1]}(w)} G(w), \quad w \in C([0,1], \mathbb{R})$$

と定める．

* 〒192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1　東京都立大学 大学院理学研究科
e-mail: nishino-soma@ed.tmu.ac.jp

2 Main results

2 曲線 $f^- < f^+$ に対して

$$K(f^-, f^+) := \{w \in C([0,1],\mathbb{R})\ ;\ f^-(t) \le w(t) \le f^+(t),\ 0 \le t \le 1\}$$

と定める．また，$A \in \mathcal{B}(C([0,1],\mathbb{R}))$ と連続確率過程 $X = \{X(t)\}_{t\in[0,1]}$ に対して，X のサンプルパスを A 上に条件付けた確率過程を $X|_A$ と表す．さらに，$\{\eta^+(\varepsilon)\}_{\varepsilon\ge 0}$ と $\{\eta^-(\varepsilon)\}_{\varepsilon\ge 0}$ を $\eta^\pm(\varepsilon) > 0$ かつ $\eta^\pm(\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ であるものとする．このとき，拡散引越過程 $H_\mu^{g^-\to g^+} = \{H_\mu^{g^-\to g^+}(t)\}_{t\in[0,1]}$ を次のように構成する：

定理 1. ある $\mathbb{R}$ 値連続 Markov 過程 $H_\mu^{g^-\to g^+} = \{H_\mu^{g^-\to g^+}(t)\}_{t\in[0,1]}$ が存在して，$C([0,1],\mathbb{R})$ 上の任意の有界連続関数 F に対して，

$$\begin{aligned}E[F(H_\mu^{g^-\to g^+})] &= \lim_{\varepsilon\to+0} E[F(X^{0\to b}\,|_{K(g^- - \eta^-(\varepsilon),\, g^+ + \eta^+(\varepsilon))})] \\ &= \frac{E[\widehat{F}(H^{g^-\to g^+})]}{E[\widehat{1}(H^{g^-\to g^+})]}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$H^{g^-\to g^+}$ は [1] において構成された Brown 引越過程である．($\widehat{F}, \widehat{1}$ の定義は前ページを参照．)

定理 1 の $H_\mu^{g^-\to g^+}$ を拡散引越過程とよぶ．定理 1 より，$H_\mu^{g^-\to g^+}$ の汎関数期待値計算は Brown 引越過程 $H^{g^-\to g^+}$ の汎関数期待値計算に帰着できることがわかる．さらに，$H_\mu^{g^-\to g^+}$ のもつ密度関数 (および推移密度関数) は，定理 1 より，[1] において既に得られている $H^{g^-\to g^+}$ の密度関数 (および推移密度関数) を用いて計算することができる．

定理 1 から得られる他の重要な結果は，「$H^{g^-\to g^+}$ のサンプルパスに対して確率 1 で成り立つ性質は，$H_\mu^{g^-\to g^+}$ のサンプルパスに対しても確率 1 で成り立つ」ことである．特に，$H_\mu^{g^-\to g^+}$ のサンプルパスが確率 1 で「時刻 0 で点 $g^-(0)$ を出発した後は曲線 g^- にヒットしない」,「時刻 1 で点 $g^+(1)$ に到達するまでは曲線 g^+ にヒットしない」,「$H_\mu^{g^-\to g^+}$ が任意の $\gamma \in (0, 1/2)$ に対して局所 γ-Hölder 連続である」ことなどが従う．

また，任意の $0 < t < 1$ に対して，時刻 $[0,t]$ 上での $H^{g^-\to g^+}$ の確率法則は $[0,t]$ 上での「条件付き 3 次元 Bessel 過程」の確率法則に対して絶対連続であることが既に知られている [1]．この事実と定理 1 を組み合わせることで，時刻 $[0,t]$ 上での一般の拡散引越過程 $H_\mu^{g^-\to g^+}$ の確率法則についても同様に「条件付き 3 次元 Bessel 過程」に対して絶対連続であることを示すことができ，Radon–Nikodym 導関数の具体形も得られる．

これらの主結果は，石谷謙介氏 (東京都立大学) との共同研究によるものである．

参考文献

[1] K. Ishitani, D. Hatakenaka and K. Suzuki: *Construction and sample path properties of Brownian house-moving between two curves*, to appear in JJIAM (arXiv:2006.02726).