

Berry-Esseen bounds for large-time asymptotics of one-dimensional diffusion processes via Malliavin-Stein method

楠岡誠一郎 (京都大学大学院理学研究科)

この講演は、昨年度の確率解析とその周辺における塩沢裕一氏 (同志社大学) の講演で発表された結果 [2] の一般化に関するもので、同氏との共同研究 [1] に基づくものである。

次の1次元確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX_t^x = \sigma(t, X_t^x)dB_t + b(t, X_t^x)dt, \\ X_0^x = x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $\sigma, b \in C^{0,1}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ とし、次を仮定する。

仮定 1. 次を満たす定数 $\alpha, \beta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, b_1, b_2, b_3 \in (0, \infty)$ の存在を仮定する。

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq \sigma(t, y) \leq \sigma_2, \quad b_1 \leq b(t, y) \leq b_2, \quad (t, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \sup_{t \in [0, \infty)} \left| \frac{\partial}{\partial y} \sigma(t, y) \right| &\leq \sigma_3 (y \vee 1)^{-\alpha-1}, \quad y \in \mathbb{R}, \\ \sup_{t \in [0, \infty)} \left| \frac{\partial}{\partial y} b(t, y) \right| &\leq b_3 y^{-\beta-1}, \quad y \geq 1. \end{aligned}$$

この仮定の下では、pathwise-unique な解 X^x が存在し、確率1で $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t^x = \infty$ が成り立つ。さらに、ある $\sigma_\infty \in C([0, \infty); [\sigma_1, \sigma_2])$ と $b_\infty \in C([0, \infty); [b_1, b_2])$ が存在し、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, \infty)} |\sigma(t, y) - \sigma_\infty(t)| &= 0, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, \infty)} |b(t, y) - b_\infty(t)| &= 0. \end{aligned}$$

これらより、時間パラメータが大きくなるときの X_t^x の漸近挙動は、 $\int_0^t \sigma_\infty(s)dB_s + \int_0^t b_\infty(s)ds$ に近いものになると考えられる。よって、中心極限定理のような結論が成り立つと期待できる。そこで、この研究では X_t^x の漸近挙動に対する Berry-Esseen 型の評価について考えた。

Z は標準正規分布に従う確率変数とし、 $\overline{\sigma_\infty}(t)$ と $\overline{b_\infty}(t)$ を次で定める。

$$\overline{\sigma_\infty}(t) := \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma_\infty(s)^2 ds}, \quad \overline{b_\infty}(t) := \frac{1}{t} \int_0^t b_\infty(s) ds.$$

さらに、 d_{TV} を確率分布の間の total variation distance とし、確率変数 X に対して X の分布を $\text{Law}(X)$ と書くことにする。主定理は次のものである。

定理 2. $\alpha > \frac{1}{2}$ と $\beta > 1$ に対して仮定 1 が成り立つとし, (1) の解 X_t^x を考える. さらに $q \in (1, \infty)$ が存在して次が成り立つと仮定する.

$$\sup_{(t,y) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}} \left(\frac{q(q+1)}{q-1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t,y) \right)^2 + 2q \frac{\partial b}{\partial y}(t,y) \right) < \frac{\sigma_1^2 b_1^2}{2}.$$

このとき, ある定数 C が存在して次が成り立つ.

$$d_{\text{TV}} \left(\text{Law} \left(\frac{X_t^x - x - \overline{tb_\infty}(t)}{\overline{\sigma_\infty}(t)\sqrt{t}} \right), \text{Law}(Z) \right) \leq \frac{C}{\sqrt{t}}, \quad t \geq 1.$$

定理 2 で現れる評価は X_t^x に対する大数の法則や中心極限定理に当たる結果を含んでいるが, これらのような極限定理は簡単に得ることができ, これらを得るだけであれば仮定も弱めることもできる. しかし, 定理 2 は total variation distance に対する評価であり, さらに評価に現れる t のオーダーは最良の $-\frac{1}{2}$ である. そのため, 定理 2 の証明には詳細な評価が必要である.

証明には Malliavin-Stein method を用いる. Malliavin-Stein method による評価には Ornstein-Uhlenbeck 作用素や Malliavin 微分が現れるため, 評価に現れる項は一般には計算しづらいものである. しかし, 今の場合は X_t^x の漸近挙動が $\int_0^t \sigma_\infty(s) dB_s + \int_0^t b_\infty(s) ds$ に近く, これに対しては具体的に計算ができるため, 漸近挙動の誤差評価により適切な評価が得られるというのが証明のアイデアである. また, 誤差項の評価には次の確率微分方程式の解 Y^x を用いる.

$$\begin{cases} dY_t^x = \sigma(t, Y_t^x) dB_t + b_1 dt, \\ Y_0^x = x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Y^x はマルチンゲールに正定数からなるドリフト項を加えたものになっているため, 比較的詳細に漸近挙動を計算することができる. さらに, 比較定理を用いると次が得られる.

$$Y_t^x \leq X_t^x, \quad t \in [0, \infty) \quad \text{almost surely.}$$

これらの事実を扱うことにより, 誤差評価を行うのが証明の流れである.

[1] では $b(x)$ がある $l \in \mathbb{R}$ において発散する場合や, 仮定 1 を空間パラメータが無限大での極限挙動におきかえた場合についても同様の結果を得ている. ただし, 2 つ目の場合は total variation distance の上からの評価は $Ct^{-\frac{1}{2}} \log t$ となっている.

[1] Seiichiro Kusuoka and Yuichi Shiozawa, Berry-Esseen bounds for large-time asymptotics of one-dimensional diffusion processes via Malliavin-Stein method, arXiv: 2411.08725.

[2] Yuichi Shiozawa, Berry-Esseen bound for the Brownian motions on hyperbolic spaces, *Studia Math.* 277(3), 213–241, 2024.