A global maximum principle for optimal control of stochastic Volterra equations with singular kernels

濱口 雄史 (京都大学大学院理学研究科)

概要

制御過程 $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ が与えられたとき, それによって定まる状態過程を $X^u = (X^u_t)_{t\in[0,T]}$, コスト関数を $J(u)$ と表す. ここで, $J(u)$ は制御過程 u および状態過程 X^u に依存して定まる実数値関数である. 最適制御問題の目標は, コスト関数 $J(u)$ を最小化するような制御過程 (最適制御過程) $\hat{u}$ を求めることである.

制御過程が値を取る空間やコスト関数が凸ではないような設定における問題を非凸最適制御問題と呼ぶ. 非凸最適制御問題における**大域的最大原理** *(global maximum principle)* は, 与えられた制御過程の最適性の必要条件をハミルトニアンの (大域的) 最大化によって特徴付けるための重要な定理であり, 決定論的常微分方程式や確率微分方程式に関する非凸制御問題においては多くの既存研究がある. 一般に, 大域的最大原理を導出するうえで, 与えられた (最適) 制御過程の “spike variation” と呼ばれる形の摂動に関する状態方程式・コスト関数の Taylor 展開, および対応する随伴方程式の解析が鍵となる. 本講演では, 決定論的常微分方程式および確率微分方程式に関する最適制御問題における大域的最大原理についての既存理論 (cf. [2]) について概説した後, 特異な核を持つ**確率ヴォルテラ方程式** *(stochastic Volterra equation; SVE)* に関する非凸最適制御問題における大域的最大原理について得られた自身の結果を紹介する.

問題設定

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし, W を 1 次元 Brown 運動, $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$ を W によって生成されるフィルトレーションとする. また, 終端時刻 $T \in (0,\infty)$ を固定する. 制御過程全体の集合を $\mathcal{U}$ と表す. 本講演では, 各制御過程 $u \in \mathcal{U}$ に対し, 状態過程 X^u を以下の controlled SVE の解として定める:

$$X^u_t = x + \int_0^t K(t-s) b(s, u_s, X^u_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t K(t-s)\sigma(s, u_s, X^u_s)\,\mathrm{d}W_s, \quad t \in [0,T].$$

ただし, $x \in \mathbb{R}$ は与えられた初期条件である. また, コスト関数 $J(u)$ を以下のように定める:

$$J(u) = \mathbb{E}\left[h(X^u_T) + \int_0^T f(t, u_t, X^u_t)\,\mathrm{d}t \right].$$

ただし, 制御過程の集合 $\mathcal{U}$, 係数 b, σ, h, f および核 K は以下の仮定を満たすものとする:

- 制御過程: (U, d) を可分距離空間, $\mathcal{U}$ を U に値を取る発展的可測過程全体の集合とする.
- 係数: $b, \sigma, f : [0,T] \times U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ および $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は有界かつ連続であるとし, 各 $(t,u) \in [0,T] \times U$ に対して $x \mapsto b(t,u,x), \sigma(t,u,x), f(t,u,x), h(x)$ は滑らかかつすべての導関数が有界であるとする.
- 核: $K : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は非負かつ非増加であるとし, $K \in L^2(0,T)$ であるとする.

SVE は確率微分方程式 (SDE) の “Volterra 型” の拡張であり, 核 K が定数 ($K = 1$) の場合は通常の伊藤型 SDE に相当する. また, K が非整数核, すなわち $K(t) = \frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} t^{H-\frac{1}{2}}$ ($H \in (0, \frac{1}{2})$) の場合は (Caputo 型) 非整数解 SDE に相当する. なお, この非整数核は Hurst 指数 H の (Riemann–Liouville 型) 非整数 Brown 運

動に現れる核に相当する．一般に, 核 K が特異的, すなわち $\lim_{t\downarrow 0} K(t)=\infty$ のとき, SVE の解は非 Markov かつ非セミマルチンゲールであり, 通常の伊藤解析が直接は適用できないという難点がある．この難点に対し, 本研究では, SVE の背後にある "無限次元的な構造" に着目し, 無限次元リフト (cf. [1]) の枠組みを用いてアプローチする．

本研究の要点

大域的最大原理を導出する上で, 与えられた (最適) 制御過程の摂動に関する状態過程・コスト関数の変分を求めることが鍵となる．本研究の設定では, 制御過程が値を取る集合 U は凸集合とは限らないため, 制御過程の凸型の摂動を用いた解析は適用できない．そこで, 本研究では spike variation による摂動を採用する．

$\hat{u}\in\mathcal{U}$ を与えられた (最適) 制御過程とする．各 $v\in\mathcal{U}$, $\tau\in[0,T)$, $\varepsilon\in(0,T-\tau]$ に対し, $\hat{u}$ の (v,τ,ε) における spike variation $u^{v,\tau,\varepsilon}\in\mathcal{U}$ を

$$u_t^{v,\tau,\varepsilon}:=\hat{u}_t\mathbb{1}_{[0,T]\setminus[\tau,\tau+\varepsilon]}(t)+v_t\mathbb{1}_{[\tau,\tau+\varepsilon]}(t),\quad t\in[0,T]$$

によって定義する．つまり, spike variation とは, 与えられた制御過程 $\hat{u}$ を微小区間 $[\tau,\tau+\varepsilon]$ において他の制御過程 v に取り換えたものを表す．$\hat{u}$ に対応する状態過程を $\hat{X}:=X^{\hat{u}}$, spike variation $u^{v,\tau,\varepsilon}$ に対応する状態過程を $X^{v,\tau,\varepsilon}:=X^{u^{v,\tau,\varepsilon}}$ と表す．与えられた制御過程 $\hat{u}$ に対応するが最適であるとき, 全ての $v\in\mathcal{U}$, $\tau\in[0,T)$, $\varepsilon\in(0,T-\tau]$ に対して $J(u^{v,\tau,\varepsilon})\geq J(\hat{u})$ が成立する．そこで, コスト関数 $J(u^{v,\tau,\varepsilon})$ の $\hat{u}$ における (1 次の)Taylor 型の展開

$$J(u^{v,\tau,\varepsilon})=J(\hat{u})+J^{1,v,\tau,\varepsilon}+o(\varepsilon)$$

を導出することで, $\hat{u}$ が最適であるための (implicit な) 必要条件 $\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}J^{1,v,\tau,\varepsilon}\geq 0$ $(\forall\, v\in\mathcal{U},\tau\in[0,T))$ が得られる．さらに, 状態方程式 (SVE) の変分に関する双対原理を用いて $J^{1,v,\tau,\varepsilon}$ の適切な表現を与えることで, ハミルトニアンの最大化による最適性の必要条件, すなわち大域的最大原理が得られる．そのために, 以下の二つのステップが重要となる:

(i) Spike variation によって摂動された controlled SVE の解 $X^{v,\tau,\varepsilon}$ の $\hat{X}$ における Taylor 展開.

(ii) 変分 SVE と双対関係にある随伴方程式の導出.

本講演では, 上述の二つのステップについて詳述し, 大域的最大原理の主張を述べる．各ステップにおける本研究結果の要点は以下の通りである:

(i) Controlled SVE の Taylor 展開の収束の速さを核 K の特異性によって特徴付けた．特に, $K\in L^6(0,T)$ と仮定することで, SVE の 2 次の変分によるコスト関数の 1 次の展開が得られる．なお, 非整数核 $K(t)=\frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})}t^{H-\frac{1}{2}}$ を考えたとき, この可積分性条件は Hurst 指数 $H>\frac{1}{3}$ の場合に相当する．

(ii) 核 K が completely monotone であるという仮定の下, 変分 SVE の無限次元リフト (cf. [1]) に着目し, 対応する随伴方程式を導出した．この随伴方程式は, 本研究で新たに派生したクラスの**無限次元後退確率発展方程式**によって記述される．

参考文献

[1] Y. Hamaguchi, Markovian lifting and asymptotic log-Harnack inequality for stochastic Volterra integral equations, *Stochastic Process. Appl.* 178, 104482, 2024.

[2] J. Yong and X.Y. Zhou, *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations*, Springer New York, 1999.