確率論的手法による HJB 方程式の Cauchy 問題の解の一意性

高橋 静真 (京都大学大学院理学研究科)

Hamilton–Jacobi–Bellman 方程式は最適制御問題の解が満たす偏微分方程式である．本講演では,HJB 方程式の Cauchy 問題の解の存在と一意性に関する先行研究を紹介したのち, 確率論的手法を用いてより弱い仮定の下で一意性の結果を紹介する．

$(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ を $(\mathcal{F}_t)$ 適合な $\mathbb{R}^N$上の標準ブラウン運動 $(W_t)_{t\geq 0}$によって定まるフィルトレーション付き確率空間とする. 与えられた $\mathbb{R}^N$値 $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測 control process $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$に対し, controlled process $X^\xi = (X_t^\xi)_{t\geq 0}$は次の式で決定される.

$$X_t^\xi = X_0 - \int_0^t \xi_s ds + W_t,\ t \geq 0. \tag{1}$$

$T > 0$, $l \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $g \in C_p(\mathbb{R}^N)$ に対し, コスト関数を

$$J_T(x;\xi) := E^x\left[\int_0^T \Big(l(X_t^\xi, \xi_t) + f(X_t^\xi)\Big)dt + g(X_T^\xi)\right], \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

で定める． ここで $C_p(\mathbb{R}^N)$ は $\mathbb{R}^N$上の連続関数で高々多項式増大であるもの全体を表し, $E^x[\cdot]$ は (1) において $X_0 = x$ と条件づけた際の期待値を表す.

$l, f,$ 及び g に対し, 次の $(H1) - (H3)$ を仮定する：

(H1) $l \in C^2(\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \backslash \{0\}))$, 任意の $x \in \mathbb{R}^N$に対し$\xi \mapsto l(x,\xi)$ は狭義凸, さらにある $l_0 > 0$ 及び $m^* > 1$ が存在して

$$l_0|\xi|^{m^*} \leq l(x,\xi) \leq l_0^{-1}|\xi|^{m^*}, \quad |D_x l(x,\xi)| \leq l_0^{-1}\Big(1 + |\xi|^{m^*}\Big), \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}$$

を満たす. ここで $D_x l(x,\xi)$ は $l(x,\xi)$ の x に関する偏微分を表す.

(H2) ある定数 $f_0 > 0$ 及び$\beta > 1$ が存在して

$$0 \leq f(x) \leq f_0^{-1}|x|^\beta, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

を満たす.

(H3) $g \in \Phi_0 := \big\{v \in C_p(\mathbb{R}^N) \mid \inf_{\mathbb{R}^N} v > -\infty\big\}$.

$T > 0$ に対し, control process $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$が

$$E^x\left[\int_0^T \left(|\xi_t|^{m^*} + \left|X_t^\xi\right|^\beta\right)dt\right] < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

を満たすとき, ξ は admissible であるという．admissible control 全体を $\mathcal{A}_T$ で表す．(2) に対する最小化問題を考え, その価値関数を以下で定める

$$u_V(T,x) := \inf_{\xi \in \mathcal{A}_T} J_T(x;\xi).$$

$h = h(x,p)$ を $l(x,\xi)$ のξに関する Fenchel-Legendre 変換とする. すなわち,

$$h(x,p) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (p \cdot \xi - l(x,\xi)), \quad (x,p) \in \mathbb{R}^{2N}.$$

この h を用いて, HJB 方程式の Cauchy 問題は次のように表される.

$$\begin{cases} \partial_t u - \dfrac{1}{2}\Delta u + h(x, Du) = f & \text{in } \mathcal{Q}, \\ u(0,\cdot) = g & \text{on } \partial_p \mathcal{Q}, \end{cases} \tag{CP}$$

ここで $\mathcal{Q} \coloneqq (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$及び$\partial_p \mathcal{Q} \coloneqq \{0\} \times \mathbb{R}^N$ と定めた. $u\colon \overline{\mathcal{Q}} \to \mathbb{R}$ が (CP) の解 (resp. 劣解, 優解) であるとは, $u \in C^{1,2}(\mathcal{Q}) \cap C_p(\overline{\mathcal{Q}})$ かつ

$$\partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + h(x, Du(t,x)) = f(x) \quad (\text{resp.} \leq f(x), \geq f(x))$$

が任意の $(t,x) \in \mathcal{Q}$ で, $u(0,x) = g(x)$ (resp. $\leq g(x), \geq g(x)$) が任意の $x \in \mathbb{R}^N$ で成り立つことをいう. 後に用いるため, $\mathcal{Q}_T \coloneqq (0,T) \times \mathbb{R}^N$及び

$$\Phi \coloneqq \left\{ u \in C^{1,2}(\mathcal{Q}) \cap C_p(\overline{\mathcal{Q}}) \mid \text{任意の } T > 0 \text{ に対し} \inf_{\mathcal{Q}_T} u > -\infty \right\}$$

と定めておく. また, $m \coloneqq \frac{m^*}{m^*-1}, \alpha \coloneqq \frac{\beta}{m} - 1$ と置く.

この節では [1] の結果のうち解の存在と一意性に関する部分をまとめる,

Theorem 1 ([1, Theorem 3.3]). (CP) の解$\bar{u} \in \Phi$であって, $\mathcal{Q}$ 上で$\bar{u} \leq u_V$なるものが存在する.

Theorem 2 ([1, Theorem 3.6]). u をある $g \in C_p(\mathbb{R}^n)$ に対する (CP) の劣解とする. また, 任意の $T > 0$ に対し, $\sup_{\mathcal{Q}_T} \frac{|u|}{1+|x|^\alpha} < \infty$ を仮定する. このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$, $T, S \geq 0$ に対し,

$$u(S+T) \leq \inf_{\xi \in \mathcal{A}_T} E^x \left[u(S, X_T^\xi) + \int_0^T \left\{ l(X_t^\xi, \xi_t) + f(X_t^\xi) \right\} dt \right]$$

が成り立つ. 特に, $u \leq u_v$が $\mathcal{Q}$ 上で成り立つ.

Theorem 3 ([1, Theorem 3.8]). v を (CP) の優解で $v \in \Phi$なるものとする. このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$, $T, S \geq 0$ に対し,

$$v(S+T) \geq \inf_{\xi \in \mathcal{A}_T} E^x \left[v(S, X_T^\xi) + \int_0^T \left\{ l(X_t^\xi, \xi_t) + f(X_t^\xi) \right\} dt \right]$$

が成り立つ. 特に, $v \geq u_V$が $\mathcal{Q}$ 上で成り立つ.

Theorem 2 を次のように改良した.

Theorem 4 (主定理 1). u をある $g \in C_p(\mathbb{R}^n)$ に対する (CP) の劣解とする. このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$, $T, S \geq 0$ に対し,

$$u(S+T) \leq \inf_{\xi \in \mathcal{A}_T} E^x \left[u(S, X_T^\xi) + \int_0^T \left\{ l(X_t^\xi, \xi_t) + f(X_t^\xi) \right\} dt \right]$$

特に, $u \leq u_V$が $\mathcal{Q}$ 上で成り立つ.

Theorem 1,3,4 を合わせて次の主張を得る

Theorem 5 (主定理 2). (CP) の解は Φにおいて一意に存在し u_Vに一致する.

参考文献

[1] Ichihara, N. (2012). Large time asymptotic problems for optimal stochastic control with superlinear cost. Stochastic Processes and Their Applications, 122(4), 1248–1275. https://doi.org/10.1016/j.spa.2011.12.005