

Berry-Esseen bound for the Brownian motions on hyperbolic spaces

塩沢 裕一（大阪大学）^{*†}

双曲空間上のブラウン運動に対して、動径過程のガウス型揺動に関する分布の一樣収束オーダーの評価を与える。さらに、空間次元が 2 または奇数ならば、この評価は精密であることを示す。

自然数 $n \geq 2$ に対して $\mathbb{H}^n$ を n 次元双曲空間とする。すなわち、 $\mathbb{H}^n$ は球対称なリーマン多様体であって、そのリーマン距離が次で与えられるものとする：

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2$$

ここで、 $d\theta^2$ は $(n-1)$ 次元単位球面 $S^{n-1} = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid |\theta| = 1\}$ 上のリーマン距離である。 Δ を $\mathbb{H}^n$ 上のラプラス・ベルトラミ作用素とし、 $X = (\{X_t\}_{t \geq 0}, \{P_x\}_{x \in \mathbb{H}^n})$ を作用素 $\Delta/2$ で生成される $\mathbb{H}^n$ 上のブラウン運動とする。 d と v をそれぞれ $\mathbb{H}^n$ 上の距離関数およびリーマン体積測度とする。

以下では $o \in \mathbb{H}^n$ を極とし、 $R_t^{(n)} = d(o, X_t)$ ($t \geq 0$)、 $P = P_o$ とおく。このとき、次の等式が成立する：

$$R_t^{(n)} = B_t + \frac{n-1}{2} \int_0^t \coth(R_s^{(n)}) ds$$

(例えば [Hsu (2002), Example 3.3.3] を参照せよ)。ただし、 $\{B_t\}_{t \geq 0}$ は 1 次元標準ブラウン運動である。さらに、 $P(\lim_{t \rightarrow \infty} R_t^{(n)} = \infty) = 1$ より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t^{(n)}}{t} = \frac{n-1}{2}, \quad P\text{-a.s.}$$

この収束の揺動に関して次の中心極限定理が成立する：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left(\frac{R_t^{(n)} - (n-1)t/2}{\sqrt{t}} \geq x \right) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

(例えば [H. Matsumoto (2010), Theorem 2.1] を参照せよ)。ここで

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du.$$

また、[Vázquez (2022), 式 (5.5)] により、(1) は $x \in \mathbb{R}$ に関して一樣収束していることが指摘されている。この収束のオーダーについて次の定理を得た：

^{*}本研究は科研費（課題番号: 22K18675, 23H01076）の助成を受けたものである。

[†]本講演内容は同題目のプレプリント（arXiv: 2309.04325）に基づく。

定理 1. 正数 $c_1 = c_1(n)$ が存在して

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left(\frac{R_t^{(n)} - (n-1)t/2}{\sqrt{t}} \geq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{c_1}{\sqrt{t}}, \quad t \geq 1.$$

さらに, 空間次元 n が 2 もしくは奇数であるとき, 正数 $c_2 = c_2(n)$ が存在して

$$P \left(\frac{R_t^{(n)} - (n-1)t/2}{\sqrt{t}} \geq 0 \right) - \Phi(0) \geq \frac{c_2}{\sqrt{t}}, \quad t \geq 1. \quad (2)$$

定理 1 は, Millson の公式と部分積分の公式とを繰り返し使うことで証明される. 以下ではこの証明の方針を述べる. n 次元双曲空間上のブラウン運動 X に対して, ボレル可測関数 $q_n(t, r) : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ が存在して

$$P \left(R_t^{(n)} \in A \right) = \omega_n \int_A q_n(t, r) \sinh^{n-1}(r) dr, \quad t > 0, A \in \mathcal{B}([0, \infty)).$$

ただし, $\omega_n = (2\pi^{n/2})/\Gamma(n/2)$. 特に

$$q_2(t, r) = \frac{2^{1/2}e^{-t/8}}{(2\pi t)^{3/2}} \int_r^\infty \frac{se^{-s^2/(2t)}}{(\cosh s - \cosh r)^{1/2}} ds, \quad q_3(t, r) = \frac{e^{-t/2}}{(2\pi t)^{3/2}} \frac{r}{\sinh r} e^{-r^2/(2t)}.$$

さらに, $n \geq 4$ に対して Millson の公式

$$q_n(t, r) = -\frac{e^{-(n-2)t/2}}{2\pi \sinh r} \frac{\partial q_{n-2}}{\partial r}(t, r), \quad t > 0, r > 0 \quad (3)$$

が成立し, 次の評価が得られる:

$$q_n(t, r) \asymp \frac{1}{t^{n/2}} \exp \left(-\frac{(n-1)^2}{8}t - \frac{n-1}{2r} - \frac{r^2}{2t} \right) (1+r+t)^{(n-3)/2} (1+r), \quad t > 0, r > 0 \quad (4)$$

(例えば [Davies (1992), §5.7], [Cammarota–De Gregorio–Macci (2014)] を参照せよ). ここで

$$T = T(t, x) = \left(x\sqrt{t} + \frac{n-1}{2}t \right) \vee 0$$

とおくと, Millson の公式 (3) より

$$\begin{aligned} P \left(\frac{R_t^{(n)} - (n-1)t/2}{\sqrt{t}} \geq x \right) &= \omega_n \int_T^\infty q_n(t, r) \sinh^{n-1} r dr \\ &= -\frac{e^{-(n-2)t/2}\omega_n}{2\pi} \int_T^\infty \frac{\partial q_{n-2}}{\partial r}(t, r) \sinh^{n-2} r dr. \end{aligned}$$

部分積分公式と (4) とを用いて計算を続けると, 次元が奇数 ($n = 2m+1$) ならば

$$\begin{aligned} P \left(\frac{R_t^{(2m+1)} - mt}{\sqrt{t}} \geq x \right) - \Phi(x) &= P \left(\frac{R_{m^2t}^{(3)} - m^2t}{\sqrt{m^2t}} \geq x \right) - \Phi(x) \\ &+ \omega_{2m+1} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{e^{-(2m-k)t/2}}{(2\pi)^k} q_{2m+1-2k}(t, T) \left(\frac{1}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \sinh^{2m-1} r \Big|_{r=T}. \end{aligned} \quad (5)$$

したがって, 次元が奇数のとき, 定理 1 の証明は 3 次元の場合に帰着される. 次元が偶数のときも同様の計算により, 定理 1 の証明は $q_2(t, r)$ に関する計算に帰着される. しかし, 計算が複雑になり, 2 次元を除く偶数次元では (2) が証明できていない.