On the optimality of refraction–reflection strategy for Lévy processes

野場 啓 (統計数理研究所)

1　序

本講演は, [1] を参考に行う.

企業が資産に余裕があるときに株主に配当金を支払い, また資産に余裕がないときに破産を避けるため, 株主から資本注入を受け取るモデルを考える. このモデルにおいて, より多くの配当金を支払い, 受け取る資本注入をより少なくする配当戦略を考える問題を, 資本注入を伴う de Finetti の最適配当問題という. 本研究では, 配当金の支払いや資本注入の受け取りを行う前の資金の挙動を 1 次元の Lévy 過程 X で表し, 「支払う配当金は時間に対して絶対連続である」という仮定を置いたうえで, 資本注入を伴う de Finetti の最適配当問題を扱った.

多くの先行研究において de Finetti の最適配当問題は, X を正の跳び, もしくは負の跳びを持たない Lévy 過程と仮定したうえで研究が行われてきた. その際, スケール関数の理論が証明の核を担ってきた. 特に今回扱うケースにおいては, X が負の跳びを持たない場合は Pérez–Yamazaki(2017), X が正の跳びを持たない場合は Pérez–Yamazaki–Yu(2018) によって, refraction–reflection strategy の最適性が示された. しかし, 近年 N.(2021) や N.–Yamazaki(arXiv, 2020) により, 正の跳びと負の跳びのいずれも持ちうる Lévy 過程に対する確率制御の問題の対処方法が発見された. 本研究では, 上記の先行研究を参考に, X を正の跳びと負の跳びのいずれも持ちうる Lévy 過程として, refraction–reflection strategy の最適性を示した.

2　準備

$X = \{X_t : t \geq 0\}$ を, その Lévy 測度 Π が

$$\int_{(-\infty,0)} |x|\Pi(dx) < \infty \tag{2.1}$$

を満たす 1 次元の Lévy 過程とする. X が非有界変動な標本路を持つ場合は, いくつか仮定を追加する必要がある. また, X によって生成される natural filtration を $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ とする. 実数 $\alpha > 0$, $q > 0$ および $\beta > 1$ を固定する.

戦略 π とは, 次の条件を満たす二つの確率過程 $L^\pi = \{L^\pi_t : t \geq 0\}$($L^\pi_t$ は時間 t までに支払った配当金の総額を表す) と $R^\pi = \{R^\pi_t : t \geq 0\}$($R^\pi_t$ は時間 t までに受け取った資本注入の総額を表す) のセットを指す:

(i) ある, $\mathbb{F}$ について発展的可測な確率過程 $l^\pi = \{l_t^\pi : t \geq 0\}$ が存在して, 次の条件を満たす:

$$l_t^\pi \in [0, \alpha], \quad L_t^\pi = \int_0^t l_s^\pi ds, \quad t \geq 0. \tag{2.2}$$

(ii) 確率過程 R^π は, $\mathbb{F}$-適合, 非減少, 右連続で, 次の条件を満たす:

$$X_t - L_t^\pi + R_t^\pi \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

戦略 π をとった時の企業の資金の変化は, 次の式で表される:

$$U_t^\pi = X_t - L_t^\pi + R_t^\pi, \quad t \geq 0. \tag{2.4}$$

次の条件を満たす戦略 π の集合を, $\mathcal{A}$ で表す:

$$\mathbb{E}_x\left[\int_{[0,\infty)} e^{-qt} dR_t^\pi\right] < \infty, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

戦略 $\pi \in \mathcal{A}$ の期待正味現在価値 v_π は, 次の式で表す:

$$v_\pi(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_{[0,\infty)} e^{-qt} dL_t^\pi - \beta \int_{[0,\infty)} e^{-qt} dR_t^\pi\right], \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

次の条件を満たす戦略 $\pi^* \in \mathcal{A}$ を最適戦略と呼ぶ:

$$v_{\pi^*}(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} v_\pi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

本予稿では, refraction–reflection strategy の定義および存在性の説明は省略する.

3 主結果

定理 3.1. ある値 $b^* \in [0, \infty)$(講演にて具体的な定義を説明する) での refraction–reflection strategy π^{b^*} は, 最適戦略である.

参考文献

[1] K. Noba. On the optimality of refraction–reflection strategy for Lévy processes. arXiv:2110.09560.