リーマン多様体上のジャンプ過程とその性質

大阪市立大学　理学研究科　甲斐　大貴

Lévy過程は確率連続性と独立増分性を持つ確率過程である。HuntはLie群及び等質空間に増分の概念を導入し、Lévy過程を等質空間上に構成した。その後Applebaum[1]は、正規直交枠束上の確率微分方程式の解を底空間に射影することでLévy過程を一般のリーマン多様体上に構成した。このようにして得られたLévy過程の大域的性質について様々な研究がされてきた。この講演では、大域的性質として再帰性と過渡性、既約性を取り上げる。

一般のリーマン多様体上の確率過程が既約性、再帰性、過渡性を持つかを判定することは重要な課題である。最近の研究にて、断面曲率が負の定数でpinchされた単連結リーマン多様体（アダマール多様体）上のLévy過程は既約性及び過渡性を持つことが分かった。本講演では多様体上のLévy過程のradial partの評価を通して、過渡性が示されることを紹介し、Lévy過程に対応する生成作用素から、爆発時刻の性質が導かれることを示す。

以下、講演にて使用する記号を紹介する。

(M,g)をm次元完備リーマン多様体とし、その断面曲率Kが$\alpha \le K \le \beta < 0$を満たしているとする。$o \in M$を一つ固定して距離関数を$r(\cdot) = dist(o,\cdot)$と定める。$\mathscr{F}(M)$を$M$上の枠束とし、$O(M)$を正規直交枠束とする。$\pi : \mathscr{F}(M) \to M$を射影とし、$u \in \mathscr{F}(M)$を$T_{\pi u}M$から$\mathbb{R}^m$への線形同型写像と思うことにする。$e_1, \dots e_m$を$\mathbb{R}^m$上の正規直交基底とし、$u \in O(M)$とすると、$ue_1, \dots ue_m$は$T_{\pi u}M$上の正規直交基底となる。

各ue_iの水平リフトを$H_i(u) \in H_uO(M) \subset T_uO(M)$とする。このとき$(H_1, \cdots, H_m)$は水平基本ベクトル場と呼ばれる。以上の記号のもと、正規直交枠束上にLévy過程を構成する。
$O(M)$上の水平Lévy過程$\{U_t\}_t$は次の確率微分方程式の解として定める。

$$
\begin{aligned}
F(U_t) - F(U_0) = &\int_0^t H_i F(U_s) \circ dB_s^i \\
&+ \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big(F \circ \mathrm{Exp}(z^i H_i)(U_{s-}) - F(U_{s-}) \Big) \widetilde{N}(dz, ds) \\
&+ \int_0^t \int_{|z|>1} \Big(F \circ \mathrm{Exp}(z^i H_i)(U_{s-}) - F(U_{s-}) \Big) N(dz, ds) \\
&+ \int_0^t \int_z \Big(F \circ \mathrm{Exp}(z^i H_i)(U_{s-}) - F(U_{s-}) - z^i H_i F(U_{s-}) 1_{|z|\le 1} \Big) \nu(dz) ds
\end{aligned}
$$

$t < e, F \in C^\infty(M)$.

表記を簡単にするため、アインシュタイン規約を使っている。ただしeは爆発時刻である。ここで$\{\mathrm{Exp}(tz^iH_i)(u)\}_t$は$O(M)$上の積分曲線である。この確率微分方程式の解$\{U_t\}_t$を底空間に射影することで多様体上のLévy過程$\{X_t\}_t$を得る。

こうして得られたLévy過程のradial partは$r(X_t)$で表される。Ichihara[8]は$\{X_t\}_t$がBrown運動のとき、radial partを調べることで再帰性、過渡性をリーマン多様体の断面曲率及びRicci曲率の情報から判定出来ることを示した。この結果を拡張し、$\{X_t\}_t$が回転対称Lévy過程の場合を調べたのが今回の研究テーマである。

参考文献

[1]Applebaum, D. and Estrade, A.: Isotropic Lévy processes on Riemannian manifolds, Ann.Probab.**28**(2000), 166–184.

[2]Applebaum, D. and Kunita, H.: Lévy flows on manifolds and Lévy processes on Lie groups, J.Math. Kyoto Univ.**33**(1993), 1103–1123.

[3]Bismut, J. M.: Large Deviations and the Malliavin Calculus. Birkhäuser, Boston (1984).

[4]Bismut, J. M.: Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's condition, Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **63**(1981), 469–505.

[5]Fujiwara et al.:Stochastic differential equations of jump type on manifolds and Lévy flows. J. Math. Kyoto. Univ. **31**(1991), 99-119.

[6]Fujiwara, T., Kunita, H.:Stochastic differential equations of jump type and Lévy processess in diffeomorphisms group. J. Math. Kyoto. Univ. **25** (1985), 71-106.

[7]Hsu, E. P.:Stochastic analysis on manifolds. Graduate Studies in Mathematics. **38** (2002), American Mathematical Society.

[8]Ichihara, K.: Curavature, geodisics and the Brownian motion on a Riemannian manifold. I. Ruccureence properties, Nagoya Math. J. **87** (1982), 115-125.

[9]Kai,H. and Takeuchi,A.:Gradient formulas for jump process on manifolds,Electron. J. Probab.**26**(2021), article no. 1, 1–15.

[10]Takeuchi, A.:Bismut-Elworthy-Li-type formulae for stochastic differential equations with jumps. J. Theoret. Probab. **23**(2010), 576-604.