

Compactness of semigroups generated by symmetric non-local Dirichlet forms with unbounded coefficients

塩沢 裕一 (大阪大学)*¹

Jian Wang (Fujian Normal University)

非有界係数を持つ非局所型ディリクレ形式について、生成されるマルコフ半群が (非)コンパクトになるための条件を与える。 $J(x, dy)$ を $\mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の非負積分核とする。測度 $J(dx, dy) := J(x, dy) dx$ の対称性 ($J(dx, dy) = J(dy, dx)$) および次の可積分条件を仮定する:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge |x - y|^2) J(x, dy) < \infty.$$

すなわち、 $J(x, dy)$ は対称レビ型過程の飛躍核を表す。 $W(x, y)$ は $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の対称なボレル可測関数であって、非負かつ局所有界で次の条件をみたすものとする:

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge |x - y|^2) W(x, y) J(x, dy) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d). \quad (1)$$

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の二次形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ を以下で定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{E}) &= \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (u(x) - u(y))^2 W(x, y) J(x, dy) dx < \infty \right\}, \\ \mathcal{E}(u, v) &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) W(x, y) J(x, dy) dx \quad (u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})). \end{aligned}$$

条件 (1) より $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$ が成立する。特に $(\mathcal{E}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ は $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ 内で可閉であって、閉包 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則ディリクレ形式となる。

$W(x, y)$ は重み関数の役割を果たす。特に $W(x, y)$ の大きさに応じて、 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から生成されるマルコフ半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ のコンパクト性が変化する。 $W(x, y)$ が小さいとき、 $(P_t)_{t \geq 0}$ は非コンパクトである:

定理 1. $(P_t)_{t \geq 0}$ が非コンパクトであるための十分条件は

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} \left[l^{-d} \int_{|x| \leq l} \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 \wedge \frac{|x - y|^2}{l^2} \right) W(x, y) J(x, dy) dx \right] < \infty.$$

次に $(P_t)_{t \geq 0}$ がコンパクトであるための十分条件を紹介する。

仮定 2. (i) 任意の正数 λ に対して、 $\mathbb{R}^d$ 上の C^1 関数 V_λ と正定数 R_0 が存在して

- $W(x, y) \geq V_\lambda(x) + V_\lambda(y)$ ($x, y \in \mathbb{R}^d$, $|x - y| < 1$);
- $\inf_{x \in \mathbb{R}^d} V_\lambda(x) > 0$ かつ $V_\lambda(x) = \lambda(1 + |x|^2)$ ($x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \geq R_0$).

(ii) $[0, 1)$ 上のボレル測度 $\nu(dz)$ が存在して

- 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ と $A \subset B(0, 1)$ に対して $J(x, x + A) \geq \nu(A)$ および $\nu(A) = \nu(-A)$;

本研究は科研費 (課題番号: JP17K05299) の助成を受けたものである。

*¹ 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: shiozawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

- $\varphi(\xi) := \int_{|z|<1} (1 - \cos\langle z, \xi \rangle) \nu(dz)$ ($\xi \in \mathbb{R}^d$), $\beta_0(r) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-r\varphi(\xi)} d\xi$ ($r > 0$)
と置く

$$\beta_0(r) < \infty, \quad \int_r^\infty \frac{\beta_0^{-1}(s)}{s} ds < \infty \quad (r > 0).$$

ただし, $\beta_0^{-1}(r)$ は $\beta_0(r)$ の逆関数である.

仮定 2 (i) は, $|x - y| < 1$ のとき $W(x, y)$ が関数 $(1 + |x|^2) + (1 + |y|^2)$ よりもオーダーの意味で真に大きいことを表す. 仮定 2 (ii) は, 飛躍核が (対称) レビ過程のように空間一様な場合と比較できることを意味する. ν は対称レビ過程 Z のレビ測度であり, φ は特性関数となる. 特に Z の分布は密度関数をもち ([1, Proposition 4.1]), マルコフ半群の超縮小性と関数不等式との関係 ([2, Theorems 3.3.14, 3.3.15]) より, 各 P_t もルベグ測度に関して密度関数をもつことが分かる.

定理 3. 仮定 2 のもと, $(P_t)_{t \geq 0}$ はコンパクトである.

定理 1, 3 の証明では, 次の 2 つの主張の関係を用いる:

- (a) $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の生成作用素の本質的スペクトルが空 ($\Leftrightarrow (P_t)_{t \geq 0}$ がコンパクト).
- (b) (超ポアンカレ不等式) 任意の正值関数 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して, ある単調非増加関数 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx \leq r\mathcal{E}(u, u) + \beta(r) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|\psi dx \right)^2 \quad (r > 0, u \in \mathcal{F}). \quad (2)$$

[2, Theorem 3.2.1] より (a) $\Rightarrow$ (b) が従う. 定理 1 の証明では, $(P_t)_{t \geq 0}$ がコンパクトであることを仮定して, (2) から矛盾を導く. 仮定 2 のもとでは (b) $\Rightarrow$ (a) も従うことに注意して, 定理 3 の証明では実際に (2) を示す.

例 4. $J(x, dy) = c_\alpha |x - y|^{-(d+\alpha)} dy$ を指数 $\alpha \in (0, 2)$ の対称安定過程の飛躍核とする. 重み関数 $W(x, y)$ を次で定義する:

$$W(x, y) = (U_1(x) + U_1(y))\mathbf{1}_{\{|x-y|<1\}} + (U_2(x) + U_2(y))\mathbf{1}_{\{|x-y|\geq 1\}}.$$

ここで U_i ($i = 1, 2$) は $\mathbb{R}^d$ 上の局所有限な非負値ボレル可測関数であって, ある $c_1 > 0$ と $q \in [0, \alpha)$ に対して $U_2(x) \leq (1 + |x|)^q$. このとき定理 1, 3 が適用できて, 次が従う:

- (i) $\inf_{x \in \mathbb{R}^d} U_1(x) > 0$ かつ $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} U_1(x)/|x|^2 = \infty \Rightarrow (P_t)_{t \geq 0}$ はコンパクト.
- (ii) $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} U_1(x)/|x|^2 < \infty \Rightarrow (P_t)_{t \geq 0}$ は非コンパクト.

より具体的に, $p \in [0, \infty)$, $q \in [0, \alpha)$ をとり, 重み関数 $W(x, y)$ を次で与える:

$$W(x, y) = \begin{cases} (1 + |x|)^p + (1 + |y|)^p & (|x - y| < 1) \\ (1 + |x|)^q + (1 + |y|)^q & (|x - y| \geq 1). \end{cases}$$

(i) (ii) より, $(P_t)_{t \geq 0}$ がコンパクトであるための必要十分条件は $p > 2$ である. $q < \alpha$ であることは条件 (1) によるものであり, マルコフ半群のコンパクト性には無関係である.

参考文献

- [1] V. Knopova and R. L. Schilling, *Forum Math.* **25** (2013), 125–149.
- [2] F.-Y. Wang, *Functional Inequalities, Markov Semigroups and Spectral Theory*, Science Press, Beijing–New York, 2005.