

On singular control for Lévy processes

野場 啓 (大阪大学大学院基礎工学研究科)

joint work with 山崎 和俊 (関西大学システム理工学部)

1 序

本研究では, ランニングコストと制御コストを最小化する戦略を考える, 特異制御問題を扱う. この問題は在庫制御問題の枠組みに入る.

具体的にはまず, Lévy 過程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ を与える. これはある製品の制御前の在庫量を表す. その対し, 意思決定者は戦略 $\pi = \{R_t^\pi : t \geq 0\}$ をとったとする. ここで R_t^π は時間 t までの製品の在庫補充量を表す. このとき制御後の時間 t における製品の在庫量は $U_t^\pi := X_t + R_t^\pi$ となる. 割引率 $q > 0$, 在庫保持にかかるコストを表す関数を f , 在庫補充にかかるコストを C としたとき, 戦略 π をとったときのコストの期待値は

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} f(U_t^\pi) dt + C \int_{[0, \infty)} e^{-qt} dR_t^\pi \right] \quad (1.1)$$

で表される. 本研究ではこの値を最小化する戦略を求めたい.

在庫制御問題に関する研究は, 正の跳びを持たない Lévy 過程や負の跳びを持たない Lévy 過程を用いたケースでは, Bensoussan–Liu–Sethi(2005), Benkherouf–Bensoussan(2009), Yamazaki(2017), Hernández–Hernández–Pérez–Yamazaki(2016), Pérez–Yamazaki–Bensoussan(2018, arXiv) 等の先行研究が存在するが, 正と負の両側に跳びを持ちうる Lévy 過程を用いたケースは本研究が初である.

本予稿では, 扱う問題の設定と主結果について紹介する.

2 準備

関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と定数 $C \in \mathbb{R}$ は以下の仮定を満たすものとする.

仮定 2.1. (i) 関数 f は凸関数である.

(ii) 関数 f は “polynomial growth in the tail” である. つまり, ある定数 $k_1, k_2 \in (0, \infty)$, $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $|f(x)| \leq k_1 + k_2|x|^N$ が成り立つ.

(iii) $f'_+(-\infty) < -Cq < f'_+(\infty)$ をみたす. ここで, $f'_+(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} f'_+(x) \in [-\infty, \infty)$, $f'_+(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} f'_+(x) \in (-\infty, \infty]$ である.

$X = \{X_t : t \geq 0\}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上に定義される Lévy 過程で, 以下の仮定を満たすとする.

仮定 2.2. (i) X はドリフトのない複合 Poisson 過程ではない.

(ii) ある定数 $\bar{\theta} > 0$ が存在して, X の Lévy 測度 Π は $\int_{\mathbb{R} \setminus (-1,1)} e^{\bar{\theta}z} \Pi(dz) < \infty$ を満たす.

また, $\mathbb{P}_x$ は $x \in \mathbb{R}$ を出発する X の法則, $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ は X によって生成される自然なフィルトレーションとし, 任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して, $\tau_b^- = \inf\{t > 0 : X_t < b\}$ とする.

3 在庫制御問題

$\mathcal{A}$ は, $\mathbb{F}$ -適合, 非減少, 右連続, $R_{0-}^\pi = 0$, および

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} |f(U_t^\pi)| dt + \int_{[0,\infty)} e^{-qt} dR_t^\pi \right] < \infty, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

を満たす確率過程 $\pi = \{R_t^\pi : t \geq 0\}$ の集合とする. ただし, $U_t^\pi := X_t + R_t^\pi$ である. $\pi \in \mathcal{A}$ に対して

$$v_\pi(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} f(U_t^\pi) dt + C \int_{[0,\infty)} e^{-qt} dR_t^\pi \right] \quad (3.2)$$

とした時,

$$v_{\pi^*}(x) = \inf_{\pi \in \mathcal{A}} v_\pi(x) \quad (3.3)$$

を満たす $\pi^* \in \mathcal{A}$ を求めたい. このような π^* は最適戦略と呼ばれる.

4 主結果

$b \in \mathbb{R}$ に対し, 戦略 $\pi^b \in \mathcal{A}$ を次の式を満たすものとする:

$$R_t^{\pi^b} = (b - X_t) \vee 0, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

定理 4.1. $b^* \in \mathbb{R}$ を次の式で定義する:

$$b^* = \inf \left\{ \mathbb{E}_b \left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_+(U_t^{\pi^b}) dt \right] + C \geq 0 \right\}. \quad (4.2)$$

このとき $b^* \in \mathbb{R}$ で, π^{b^*} は最適戦略である.