

Jump process on Riemannian manifolds

甲斐 大貴

2020/11/25

概要

ユークリッド空間上の Lévy 過程とは、独立増分性、定常増分性を持つ確率過程である。これをより一般化し、Lie 群や対称空間、リーマン多様体上で構成する研究がされてきた。確率過程の増分はユークリッド空間に加法が定まっていることで定義できるが、Hunt は加法に対応する群演算が備わっている Lie 群上の増分を使って Lévy 過程を構成した。一方で、空間に演算が定義できない一般のリーマン多様体では増分が定義できないことが問題となる。そこでユークリッド空間上の Lévy 過程が Feller 半群と Feller 半群が定める生成作用素に対応関係があることに注目する。例えばユークリッド空間上の Brown 運動は、ラプラス作用素 $\frac{1}{2}\Delta$ と対応関係がある。Elles-Elworthy-Malliavin は正規直交枠束上の確率微分方程式から決まる 2 階線形微分作用素が、多様体上の Laplace–Beltrami 作用素 Δ_M に対応していることを使い、正規直交枠束上の確率微分方程式の解を多様体に射影することでリーマン多様体に Brown 運動を構成した。Applebaum[1],[2] は、Elles-Elworthy-Malliavin による多様体上の Brown 運動の構成を一般化して正規直交枠束上のジャンプ型確率微分方程式を解くことで水平 Lévy 過程を構成し、それを底空間に射影することでリーマン多様体上の Lévy 過程を構成した。本講演ではこの水平 Lévy 過程の射影から得られたリーマン多様体上の Lévy 過程に対して、部分積分公式を異なる 2 種類の方法で導く。その中で、考察対象の多様体に対してコンパクト性を仮定し、Lévy 測度に対しては多様体の単射半径内の台が存在と回転対称性を仮定した。多様体をコンパクトに仮定する理由は、[3],[4] により、水平 Lévy 過程が道ごとに一意的な極大解を持つからである。さらにこの時 [3] から、水平 Lévy 過程が Lévy フローを定めることが分かっている。Lévy 測度に回転対称性を仮定するのは、[1] の結果から、水平 Lévy 過程を射影して得られる多様体上の Lévy 過程が Markov 性を持ち、従って Feller 半群との対応関係があるからである。

多様体上の Lévy 過程に対する 2 種類の部分積分公式の導出において、どちらも手法もマルチンゲール表現定理と対応する確率過程の 2 次変分をとる。その中で、1 つ目の方法は [8] によるジャンプ変数に対する発散定理を使う手法である。この手法を使うためには水平 Lévy 過程の出発点に関する滑らかさが必要であるが、考察対象の多様体をコンパクトに仮定することでその正規直交枠束もコンパクトになり、従って前述した [3] より、出発点に関して滑らかであることが得られる。2 つ目の方法は、Bismut によるリーマン多様体上の Brown 運動に対する部分積分公式の導出方法を Lévy 過程に応用する方法である。Bismut は、リーマン多様体上の Brown 運動に対する部分積分公式を導出したが、導出過程において、Ricci 曲率が重要な役割を果たす。ここで特に重要な性質は Ricci 曲率をベクトル場に作用させると、ベクトル場と Laplace–Beltrami 作用素の交換子が現れることである。本論文ではこれを一般化して多様体上の Lévy 過程に対する部分積分公式を構成した。

本講演の構成は次の通りである。最初に微分幾何で必要な正規直交枠束とそれに関係する事柄をまとめる。次に水平 Lévy 過程を構成し、対応する半群と生成作用素を求める。ここで水平 Lévy 過程に回転対称性を仮定することで、底空間に射影して得られた Lévy 過程が Feller 半群を定めることを確認する。以降この回転対称 Lévy 過程についてのみ取り扱う。Bismut による多様体上の Brown 運動に対する部分積分公式とその導出方法を紹介する。これを一般化することで、回転対称水平 Lévy 過程に対する部分積分公式を導く。なお時間に余裕があれば具体的な多様体上の Lévy 過程の表示を紹介したいと思う。

参考文献

- [1] Applebaum, D., Estrade, A.: *Isotropic Lévy processes on Riemannian manifolds*. *Ann. Probab.* **28**, 166-184 (2000)
- [2] Applebaum, D.: *A horizontal Lévy process on the bundle of orthonormal frames over a complete Riemannian manifold*. *Séminaire de Probabilités. XXIX*, 166-180. *Lecture Notes in Math.*, **1613**. Springer, Berlin (1995)
- [3] Fujiwara, T.: *Stochastic differential equations of jump type on manifolds and Lévy flows*. *J. Math. Kyoto. Univ.* **31**, 99-119 (1991)
- [4] Fujiwara, T., Kunita, H.: *Stochastic differential equations of jump type and Lévy processes in diffeomorphisms group*. *J. Math. Kyoto. Univ.* **25**, 71-106 (1985)
- [5] Hsu, E. P.: *Stochastic analysis on manifolds*. Graduate Studies in Mathematics. **38**, American Mathematical Society (2002)
- [6] Kunita, H.: *Representation of martingales with jumps and applications to mathematical finance*. *Stochastic analysis and related topics in Kyoto*, 209-232. *Adv. Stud. Pure Math.* **41**. Math. Soc. Japan, Tokyo (2004)
- [7] Kunita, H.: *Stochastic flows and jump-diffusions*. Probability Theory and Stochastic Modelling. **92**. Springer, Singapore (2019)
- [8] Takeuchi, A.: *Bismut-Elworthy-Li-type formulae for stochastic differential equations with jumps*. *J. Theoret. Probab.* **23**, 576-604 (2010)
- [9] 野水克己.: 現代微分幾何学入門. 基礎数学選書. **25**. 裳華房 (1993)