Smooth approximation of Yang–Mills theory on $\mathbb{R}^2$

山下秀康

愛知学院大学

November 10, 2016

背景: 量子 Yang–Mills 理論の厳密な存在証明

現在「(連続時空での) 量子 Yang–Mills (YM) 理論」の数学的に厳密な定義すらまだ存在していないようである。 したがってそれが「存在するか否か」という問題の数学的意味も今のところ明確ではない。

しかし, 数値計算から, 4 次元以下の格子ゲージ理論に何らかの連続極限が存在すると予想されている。また, 格子ゲージ理論の極限の存在証明という問題は数学的に定式化しやすい (有限格子を扱う限り発散の困難は現れない)。 よって, この問題の研究のためには格子ゲージ理論の厳密な解析をするのが「正攻法」であるように思われる。

T. Balaban は 1980 年代の仕事で, 4 次元格子ゲージ理論の連続極限の存在の問題 (ultraviolet stability problem) に関して重要な結果を得た。 しかし, その研究の後継者が (Balaban 自身を含めて) あまり出ていないようである。

計算・解析があまりにも複雑で lengthy になり, 理論の見通しが立たなくなったため ?「正攻法」そのものの困難 ?

背景: 量子 Yang–Mills 理論の厳密な存在証明

現在「(連続時空での) 量子 Yang–Mills (YM) 理論」の数学的に厳密な定義すらまだ存在していないようである。 したがってそれが「存在するか否か」という問題の数学的意味も今のところ明確ではない。
しかし, 数値計算から, 4 次元以下の格子ゲージ理論に何らかの連続極限が存在すると予想されている。また, 格子ゲージ理論の極限の存在証明という問題は数学的に定式化しやすい (有限格子を扱う限り発散の困難は現れない)。 よって, この問題の研究のためには格子ゲージ理論の厳密な解析をするのが「正攻法」であるように思われる。
T. Balaban は 1980 年代の仕事で, 4 次元格子ゲージ理論の連続極限の存在の問題 (ultraviolet stability problem) に関して重要な結果を得た。 しかし, その研究の後継者が (Balaban 自身を含めて) あまり出ていないようである。
計算・解析があまりにも複雑で lengthy になり, 理論の見通しが立たなくなったため?「正攻法」そのものの困難?

背景: 量子 Yang–Mills 理論の厳密な存在証明

現在「(連続時空での) 量子 Yang–Mills (YM) 理論」の数学的に厳密な定義すらまだ存在していないようである。 したがってそれが「存在するか否か」という問題の数学的意味も今のところ明確ではない。
しかし, 数値計算から, 4 次元以下の格子ゲージ理論に何らかの連続極限が存在すると予想されている。また, 格子ゲージ理論の極限の存在証明という問題は数学的に定式化しやすい (有限格子を扱う限り発散の困難は現れない)。 よって, この問題の研究のためには格子ゲージ理論の厳密な解析をするのが「正攻法」であるように思われる。
T. Balaban は 1980 年代の仕事で, 4 次元格子ゲージ理論の連続極限の存在の問題 (ultraviolet stability problem) に関して重要な結果を得た。 しかし, その研究の後継者が (Balaban 自身を含めて) あまり出ていないようである。
計算・解析があまりにも複雑で lengthy になり, 理論の見通しが立たなくなったため？「正攻法」そのものの困難？

背景: 量子 Yang–Mills 理論の厳密な存在証明

現在「(連続時空での) 量子 Yang–Mills (YM) 理論」の数学的に厳密な定義すらまだ存在していないようである。 したがってそれが「存在するか否か」という問題の数学的意味も今のところ明確ではない。
しかし, 数値計算から, 4 次元以下の格子ゲージ理論に何らかの連続極限が存在すると予想されている。また, 格子ゲージ理論の極限の存在証明という問題は数学的に定式化しやすい (有限格子を扱う限り発散の困難は現れない)。 よって, この問題の研究のためには格子ゲージ理論の厳密な解析をするのが「正攻法」であるように思われる。
T. Balaban は 1980 年代の仕事で, 4 次元格子ゲージ理論の連続極限の存在の問題 (ultraviolet stability problem) に関して重要な結果を得た。 しかし, その研究の後継者が (Balaban 自身を含めて) あまり出ていないようである。
計算・解析があまりにも複雑で lengthy になり, 理論の見通しが立たなくなったため？「正攻法」そのものの困難？

2 次元 Yang–Mills 理論

2 次元 YM 理論については, 格子近似をせず最初から連続時空で厳密に理論を構成する研究がなされている。 (e.g. B. K. Driver 1989, A. Sengupta 1993） また, 通常の格子ゲージ理論で用いられる正方格子より一般的な「格子」(多角形分割) 近似を考察し, その連続極限を厳密に構成することもできる。(T. Lévy 2003). これらの研究は $\mathbb{R}^2$ だけでなく一般の 2 次元 Riemann 多様体上で考察されている。

これらの理論は一応成功したとは言える。しかし, これらの研究もその後大きく発展しているようには見えない。

2 次元 YM 理論 (のうち, さらに特定のゲージ固定をしたもの) に特化した手法を用いており, 最終目標の 4 次元 YM 理論にはつながりそうにないため？

2 次元 Yang–Mills 理論

2 次元 YM 理論については, 格子近似をせず最初から連続時空で厳密に理論を構成する研究がなされている。 (e.g. B. K. Driver 1989, A. Sengupta 1993） また, 通常の格子ゲージ理論で用いられる正方格子より一般的な「格子」(多角形分割) 近似を考察し, その連続極限を厳密に構成することもできる。(T. Lévy 2003). これらの研究は $\mathbb{R}^2$ だけでなく一般の 2 次元 Riemann 多様体上で考察されている。
これらの理論は一応成功したとは言える。しかし, これらの研究もその後大きく発展しているようには見えない。
2 次元 YM 理論 (のうち, さらに特定のゲージ固定をしたもの) に特化した手法を用いており, 最終目標の 4 次元 YM 理論にはつながりそうにないため？

2次元 Yang–Mills 理論

2次元 YM 理論については, 格子近似をせず最初から連続時空で厳密に理論を構成する研究がなされている。 (e.g. B. K. Driver 1989, A. Sengupta 1993) また, 通常の格子ゲージ理論で用いられる正方格子より一般的な「格子」(多角形分割) 近似を考察し, その連続極限を厳密に構成することもできる。(T. Lévy 2003).
これらの研究は $\mathbb{R}^2$ だけでなく一般の2次元 Riemann 多様体上で考察されている。
これらの理論は一応成功したとは言える。しかし, これらの研究もその後大きく発展しているようには見えない。
2次元 YM 理論 (のうち, さらに特定のゲージ固定をしたもの) に特化した手法を用いており, 最終目標の4次元 YM 理論にはつながりそうにないため？

本研究の中期目標

Driver, Sengupta らが構成した 2 次元 YM 理論から, 他の次元の YM にも一般化できるかもしれない性質を抽出する。

2 次元になるべく特化しない手法を用いて 2 次元 YM を特徴づける； 具体的構成法によらない, 抽象的でかつ見通しのよい 2 次元 YM の特徴づけを与える。

本研究の中期目標

Driver, Sengupta らが構成した 2 次元 YM 理論から, 他の次元の YM にも一般化できるかもしれない性質を抽出する。
2 次元になるべく特化しない手法を用いて 2 次元 YM を特徴づける； 具体的構成法によらない, 抽象的でかつ見通しのよい 2 次元 YM の特徴づけを与える。

Let $G = SU(n)$, and $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$, the Lie algebra of G equipped with the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$, minus the Killing form. Let $\Omega^1 = \Omega^1(\mathbb{R}^2, \mathfrak{g})$ denote the space of $\mathfrak{g}$-valued smooth 1-forms on $\mathbb{R}^2$. Let $A = A_1 dx_1 + A_1 dx_2 \in \Omega^1$ $(A_1, A_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathfrak{g}))$. The **parallel transport** $\mathscr{U}_{\mathfrak{c},A}(t) \in G$ $(t \in \mathbb{R})$ along the curve $\mathfrak{c} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ is defined by the differential equation

$$\frac{d\mathscr{U}_{\mathfrak{c},A}(t)}{dt} = A(\dot{\mathfrak{c}}(t))\, \mathscr{U}_{\mathfrak{c},A}(t) := \sum_{k=1}^{2} A_k(\mathfrak{c}(t))\dot{\mathfrak{c}}_k(t)\mathscr{U}_{\mathfrak{c},A}(t), \tag{1}$$

with the initial condition $\mathscr{U}_{\mathfrak{c},A}(0) = e$.

起点となる予想

$\ell = \mathfrak{c} \restriction [0,1]$ が loop のとき (i.e. $\mathfrak{c}(0) = \mathfrak{c}(1)$) , $\mathscr{U}_{\mathfrak{c},A}(1)$ の値を ℓ に沿った **holonomy** あるいは **Wilson loop** という。

Conjecture

確率空間 $(X, \mathbb{P})$ と, その上の Ω^1-値確率変数列 $A^{(j)}$ $(j \in \mathbb{N})$ が存在して, 次をみたす：

(i) $\mathbb{P}\left[\forall \mathfrak{c} \in C^\infty([0,1], \mathbb{R}^2), \quad \mathscr{U}_{\mathfrak{c}} := \lim_{j\to\infty} \mathscr{U}_{\mathfrak{c},A^{(j)}} \textit{ in } L^\infty\right] = 1.$

(ii) 確率変数系 $\{\mathscr{U}_{\mathfrak{c}} : \mathfrak{c} \in C^\infty([0,1], \mathbb{R}^2),\ \mathfrak{c} \textit{ is a loop}\}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の *YM* の *Wilson loops* の確率法則に従う。

注： 2 次元 YM は「厳密に解けるモデル」であり, Wilson loops の確率法則は既知であり, explicit に書ける。
3, 4 次元 YM ではそれは未知 (明確な定義すら未存在) だが, 上の予想はその場合にも成立するのではないか？ (希望的観測)
上の C^∞ は $C^{1\text{-var}}$(有界変動かつ連続) まで広げられそう。

より具体的な中期目標

もし上の予想がなりたつならば，この条件をみたす Ω^1-値確率変数列 $A^{(j)}$ $(j \in \mathbb{N})$ 全体から成る空間が考えられる。すると，次に，この空間を (おそらく関数解析と幾何学の言葉で) 特徴づけるという目標が設定できる。

それができれば，3, 4 次元 YM にも応用できそう？

しかし，その入口であるところの上の予想の証明に手間取っている状態。(確率論，関数解析，幾何学等の専門家の教えを乞う)

より具体的な中期目標

もし上の予想がなりたつならば，この条件をみたす Ω^1-値確率変数列 $A^{(j)}$ $(j \in \mathbb{N})$ 全体から成る空間が考えられる。すると，次に，この空間を (おそらく関数解析と幾何学の言葉で) 特徴づけるという目標が設定できる。
それができれば，3, 4 次元 YM にも応用できそう？
しかし，その入口であるところの上の予想の証明に手間取っている状態。(確率論，関数解析，幾何学等の専門家の教えを乞う)

より具体的な中期目標

もし上の予想がなりたつならば，この条件をみたす Ω^1-値確率変数列 $A^{(j)}$ ($j \in \mathbb{N}$) 全体から成る空間が考えられる。すると，次に，この空間を (おそらく関数解析と幾何学の言葉で) 特徴づけるという目標が設定できる。
それができれば，3, 4 次元 YM にも応用できそう？
しかし，その入口であるところの上の予想の証明に手間取っている状態。(確率論，関数解析，幾何学等の専門家の教えを乞う)

Wong-Zakai 型定理

(滑らかな確率過程を係数に持つ) 確率常微分方程式の列が与えられている。その (滑らかな) 解の列が (滑らかではない) 確率過程に収束することを証明する問題：広義の **Wong-Zakai 型問題**
この解決のためには確率論における **Wong-Zakai 型定理**が必要。
(1) N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes* 2nd ed. (1989), p.497, Thm. 7.2：
元の Wong and Zakai (1969) の結果よりは大きく一般化されているが, 上の目的のためにはさらなる一般化が必要。
(2) I. Gyöngy and G. Michaletzky, On Wong–Zakai approximations with δ-martingales, *Proc. R. Soc. Lond.* A, 460 (2004):
これは Ikeda–Watanabe の定理よりは一般的されているように見える (ただし強弱の関係は不明)。
しかし, さらなる一般化が望まれる。また (私の能力では) 使いにくい。

Wong-Zakai 型定理

(滑らかな確率過程を係数に持つ) 確率常微分方程式の列が与えられている。その (滑らかな) 解の列が (滑らかではない) 確率過程に収束することを証明する問題：広義の **Wong-Zakai 型問題**
この解決のためには確率論における **Wong-Zakai 型定理**が必要。
(1) N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes* 2nd ed. (1989), p.497, Thm. 7.2：
元の Wong and Zakai (1969) の結果よりは大きく一般化されているが, 上の目的のためにはさらなる一般化が必要。
(2) I. Gyöngy and G. Michaletzky, On Wong–Zakai approximations with δ-martingales, *Proc. R. Soc. Lond.* A, 460 (2004):
これは Ikeda–Watanabe の定理よりは一般的されているように見える (ただし強弱の関係は不明)。
しかし, さらなる一般化が望まれる。また (私の能力では) 使いにくい。

Wong-Zakai 型定理

(滑らかな確率過程を係数に持つ) 確率常微分方程式の列が与えられている。その (滑らかな) 解の列が (滑らかではない) 確率過程に収束することを証明する問題：広義の **Wong-Zakai 型問題**
この解決のためには確率論における **Wong-Zakai 型定理**が必要。
(1) N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes* 2nd ed. (1989), p.497, Thm. 7.2：
元の Wong and Zakai (1969) の結果よりは大きく一般化されているが, 上の目的のためにはさらなる一般化が必要。
(2) I. Gyöngy and G. Michaletzky, On Wong–Zakai approximations with δ-martingales, *Proc. R. Soc. Lond.* A, 460 (2004):
これは Ikeda–Watanabe の定理よりは一般的されているように見える (ただし強弱の関係は不明)。
しかし, さらなる一般化が望まれる。また (私の能力では) 使いにくい。

(3) H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, (1990), p.281, Thm. 5.7.4.

2 次元 YM について, まず, かなり単純化した「練習問題」を考えて, それにこの定理を適用した。すると, 定理の条件が成立することを示すための不等式の評価がかなり複雑で lengthy になり, 研究継続を断念。

これらの結果はすべて通常の (martingale に基づく) 確率過程の理論の下で定式化されている。

$\Longrightarrow$ Wong-Zakai 型問題と martingale 理論は根本的に相性が悪いのではないか？

Wong-Zakai 型問題には **Rough path theory** が有効そうであることを知る。

当初, Rough path theory の「流派」の中でも **Paracontrolled distributions** の理論 (GIP 理論) (M. Gubinelli, P. Imkeller and N. Perkowski, 2015) がとくに私の目的に適合しているように見えたので, その路線で研究。

しかし, その後, GIP 理論よりも「通常の」rough path theory (e.g. P. Friz and M. Hairer, *A Course on Rough Paths*, (2014)) で考えたほうが問題がかなり簡単になることが判明する。

(3) H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, (1990), p.281, Thm. 5.7.4.

2 次元 YM について, まず, かなり単純化した「練習問題」を考えて, それにこの定理を適用した。すると, 定理の条件が成立することを示すための不等式の評価がかなり複雑で lengthy になり, 研究継続を断念。

これらの結果はすべて通常の (martingale に基づく) 確率過程の理論の下で定式化されている。

$\Longrightarrow$ Wong-Zakai 型問題と martingale 理論は根本的に相性が悪いのではないか？

Wong-Zakai 型問題には **Rough path theory** が有効そうであることを知る。

当初, Rough path theory の「流派」の中でも **Paracontrolled distributions** の理論 (GIP 理論) (M. Gubinelli, P. Imkeller and N. Perkowski, 2015) がとくに私の目的に適合しているように見えたので, その路線で研究。

しかし, その後, GIP 理論よりも「通常の」rough path theory (e.g. P. Friz and M. Hairer, *A Course on Rough Paths*, (2014)) で考えたほうが問題がかなり簡単になることが判明する。

(3) H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, (1990), p.281, Thm. 5.7.4.
2 次元 YM について, まず, かなり単純化した「練習問題」を考えて, それにこの定理を適用した。すると, 定理の条件が成立することを示すための不等式の評価がかなり複雑で lengthy になり, 研究継続を断念。
これらの結果はすべて通常の (martingale に基づく) 確率過程の理論の下で定式化されている。
$\Longrightarrow$ Wong-Zakai 型問題と martingale 理論は根本的に相性が悪いのではないか？
Wong-Zakai 型問題には **Rough path theory** が有効そうであることを知る。
当初, Rough path theory の「流派」の中でも **Paracontrolled distributions** の理論 (GIP 理論) (M. Gubinelli, P. Imkeller and N. Perkowski, 2015) がとくに私の目的に適合しているように見えたので, その路線で研究。
しかし, その後, GIP 理論よりも「通常の」rough path theory (e.g. P. Friz and M. Hairer, *A Course on Rough Paths*, (2014)) で考えたほうが問題がかなり簡単になることが判明する。

(3) H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, (1990), p.281, Thm. 5.7.4.
2 次元 YM について，まず，かなり単純化した「練習問題」を考えて，それにこの定理を適用した。すると，定理の条件が成立することを示すための不等式の評価がかなり複雑で lengthy になり，研究継続を断念。
これらの結果はすべて通常の (martingale に基づく) 確率過程の理論の下で定式化されている。
$\Longrightarrow$ Wong-Zakai 型問題と martingale 理論は根本的に相性が悪いのではないか？
Wong-Zakai 型問題には **Rough path theory** が有効そうであることを知る。
当初，Rough path theory の「流派」の中でも **Paracontrolled distributions** の理論 (GIP 理論) (M. Gubinelli, P. Imkeller and N. Perkowski, 2015) がとくに私の目的に適合しているように見えたので，その路線で研究。
しかし，その後，GIP 理論よりも「通常の」rough path theory (e.g. P. Friz and M. Hairer, *A Course on Rough Paths*, (2014)) で考えたほうが問題がかなり簡単になることが判明する。

(3) H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, (1990), p.281, Thm. 5.7.4.
2 次元 YM について, まず, かなり単純化した「練習問題」を考えて, それにこの定理を適用した。すると, 定理の条件が成立することを示すための不等式の評価がかなり複雑で lengthy になり, 研究継続を断念。
これらの結果はすべて通常の (martingale に基づく) 確率過程の理論の下で定式化されている。
$\Longrightarrow$ Wong-Zakai 型問題と martingale 理論は根本的に相性が悪いのではないか？
Wong-Zakai 型問題には **Rough path theory** が有効そうであることを知る。
当初, Rough path theory の「流派」の中でも **Paracontrolled distributions** の理論 (GIP 理論) (M. Gubinelli, P. Imkeller and N. Perkowski, 2015) がとくに私の目的に適合しているように見えたので, その路線で研究。
しかし, その後, GIP 理論よりも「通常の」rough path theory (e.g. P. Friz and M. Hairer, *A Course on Rough Paths*, (2014)) で考えたほうが問題がかなり簡単になることが判明する。

部分的結果

滑らかな曲線 $\mathfrak{c} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ のうち, ある「良い性質」を持つもの全体を $\mathfrak{C}_{\mathrm{nice}}$ とする。

Theorem (cf. Conj. 0.1)

Ω^1-値確率変数列 $A^{(j)}$ $(j \in \mathbb{N})$ が存在して次が成立する。 任意の有限部分集合 $S \subset \mathfrak{C}_{\mathrm{nice}}$ に対して

(i) $\mathbb{P}\left[\forall \mathfrak{c} \in S,\ \mathscr{U}_{\mathfrak{c}} := \lim_{j\to\infty} \mathscr{U}_{\mathfrak{c},A^{(j)}} \in C([0,1],G)\right] = 1.$

ここで lim は一様収束の意とする。

(ii) G 値確率変数系 $\{\mathscr{U}_{\mathfrak{c}} : \mathfrak{c} \in S,\ \mathfrak{c}\ \textit{is a loop}\}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の *YM* の *Wilson loops* の確率法則に従う。

Littlewood–Paley 理論

Let $\chi, \rho \in \mathscr{D}$ be nonnegative radial functions on $\mathbb{R}^d$, such that
i. $\mathrm{supp}\chi$ is contained in a ball and $\mathrm{supp}\rho$ is contained in an annulus;
ii. $\chi(z) + \sum_{j\geq 0} \rho(2^{-j}z) = 1$ for all $z \in \mathbb{R}^d$;
iii. $\mathrm{supp}(\chi) \cap \mathrm{supp}(\rho(2^{-j}\cdot)) = \emptyset$ for $j \geq 1$ and $\mathrm{supp}(\rho(2^{-i}\cdot)) \cap \mathrm{supp}(\rho(2^{-j}\cdot)) = \emptyset$ for $|i-j| > 1$.
We call such (χ, ρ) **dyadic partition of unity**, and we frequently employ the notation

$$\rho_{-1} := \chi, \quad \rho_j := \rho(2^{-j}\cdot), \quad j \geq 0.$$

The **Littlewood–Paley blocks** are now defined as

$$\boldsymbol{\Delta}_{-1} u := \mathscr{F}^{-1}(\chi \mathscr{F} u) = \mathscr{F}^{-1}(\rho_{-1} \mathscr{F} u), \quad \boldsymbol{\Delta}_j u := \mathscr{F}^{-1}(\rho_j \mathscr{F} u), \quad j \geq 0.$$

The jth **mollifying operator** is $\boldsymbol{S}_j u := \sum_{i \leq j-1} \boldsymbol{\Delta}_i u$, which satisfies $\lim_{j\to\infty} S_j u = u$.

Let W be a $\mathfrak{g}$-valued standard Gaussian white noise on $\mathbb{R}^2$. Define the jth **smooth approximation** $W^{(j)} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathfrak{g})$ of W by $W^{(j)} := \boldsymbol{S}_j W$. Define the Ω^1-valued random variable $A^{(j)} = A_1^{(j)} dx_1 + A_2^{(j)} dx_2 \in \Omega^1$ $(A_1^{(j)}, A_2^{(j)} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathfrak{g}))$ by

$$A_1^{(j)}(x) \equiv 0, \quad A_2^{(j)}(x) := \int_0^{x^1} W^{(j)}(\xi, x_2) d\xi, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

and define $\mathscr{U}_{\mathfrak{c}, A^{(j)}}$ by (1). The condition $A_1^{(j)}(x) \equiv 0$ is called the **axial gauge condition**.

For $t \geq 0$, define $X^{(j)}(t) = X^{(j)}_{\mathfrak{c}}(t)$ to be the line integral of $A^{(j)}$ along $\mathfrak{c} \restriction [0, t]$:

$$X^{(j)}_{\mathfrak{c}}(t) := \int_{\mathfrak{c}\restriction[0,t]} A^{(j)}. \tag{3}$$

We see $X^{(j)}(t) = \int_0^t \int_0^{\mathfrak{c}_1(t')} W^{(j)}(\xi, \mathfrak{c}_2(t'))\dot{\mathfrak{c}}_2(t')d\xi\, dt'$.
For $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ and $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, let

$$\hat{\mathcal{E}}_{\mathfrak{c}}(H, h) := \int_0^1 \int_0^{\mathfrak{c}_1(t)} H(x_1, \mathfrak{c}_2(t))h(t)\dot{\mathfrak{c}}_2(t)dx_1 dt.$$

if the integral in the r.h.s. exists. Then we see

$$X^{(j)}(t) = \hat{\mathcal{E}}_{\mathfrak{c}}(W^{(j)}, \mathbf{1}_{[0,t]})$$

Define $\mathcal{E}_{\mathfrak{c}} : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ by

$$\langle H, \mathcal{E}_{\mathfrak{c}} h\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \hat{\mathcal{E}}_{\mathfrak{c}}(H, h), \quad H \in L^2(\mathbb{R}^2),\ h \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Nice (well-behaved) curves

Let $\mathfrak{C} \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ be the set of curves which are constant on $(-\infty, 0]$ and $[1, \infty)$, respectively. Define subsets $\mathfrak{C}_{\mathrm{Rot}}$, $\mathfrak{C}_\infty \subset \mathfrak{C}$ by

$$\mathfrak{C}_{\mathrm{Rot}} := \left\{ \mathfrak{c} \in \mathfrak{C} : \ \mathrm{Rot}(\mathfrak{c}) := \sup_{(s,t)\in\mathbb{R}^2_<} \left\| \mathcal{E}_\mathfrak{c} \mathbf{1}_{[s,t]} \right\|_{L^\infty} < \infty \right\}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{C}_\infty := \ \{\mathfrak{c} \in \mathfrak{C} : \ \|\mathcal{E}_\mathfrak{c}\|_{\infty\infty} < \infty\} \subset \mathfrak{C}_{\mathrm{Rot}}. \tag{5}$$

where $\|\mathcal{E}_\mathfrak{c}\|_{\infty\infty} := \sup\{\|\mathcal{E}_\mathfrak{c} h\|_{L^\infty} ; h \in L^\infty([0,1]), \ \|h\|_{L^\infty} \le 1\}$.
本当は上の $\mathfrak{C}$ に属する曲線全体について定理を証明したいが、解析が難しいので、「ふるまいの良い」曲線の集合 $\mathfrak{C}_{\mathrm{nice}} \subset \mathfrak{C}$ を選ぶこととする。$\mathfrak{C}_{\mathrm{nice}}$ として $\mathfrak{C}_{\mathrm{Rot}}$ を採用したいのだが、それでもまだ成功していないため、ここでは更に狭い $\mathfrak{C}_\infty$ を採用する。

V を有限次元線型空間とし $T^{(2)}(V) := \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V)$ (truncated tensor algebra) とする。 $T^{(2)}(V)$ の元を $\mathbf{X} = (r, X, \mathbb{X})$ のように書く。 $X \in C_0^{1\text{-var}}([0,T],V)$ (i.e. X が有界変動連続関数で $X_0 = 0$), のとき $\mathrm{lift}(X) \in C([0,T], T^{(2)}(V))$ を次で定義する。

$$t \mapsto \mathrm{lift}(X)_t := \left(1,\ X_t,\ \int_0^t X_r \otimes dX_r\right) \in T^{(2)}(V)$$

$\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t$ とする。 $\mathbf{X}_{s,u} = \mathbf{X}_{s,t} \otimes \mathbf{X}_{t,u}$ がなりたつ (**Chen' relation**).

$$G^{(2)}(V) := \left\{\mathrm{lift}(X)_t : X \in C_0^{1\text{-var}}([0,T],V)\right\} \subset T^{(2)}(V) \qquad (6)$$

は $\otimes$ を積とする群となり、その上に **Carnot-Caratheodory 距離** d_{CC} というものが自然に定義される。$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in G^{(2)}(V)$ のとき

$$d_{\mathrm{CC}}(o, \mathbf{X}) \simeq |X| + |\mathbb{X}|^{1/2}, \quad o := (1,0,0) \in G^{(2)}(V)$$

$$d_{\mathrm{CC}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = d_{\mathrm{CC}}(o, \mathbf{X}^{-1} \otimes \mathbf{Y}) \simeq |Y - X| + |\mathbb{Y} - \mathbb{X} - X \otimes (Y - X)|^{1/2}$$

For $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C([0,T], G^{(2)}(V))$,

$$d_{\mathfrak{h}\text{-Höl}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = d_{\mathrm{CC};\mathfrak{h}\text{-Höl};[0,T]}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \sup_{0 \le s < t \le T} \frac{d_{\mathrm{CC}}(\mathbf{X}_{s,t}, \mathbf{Y}_{s,t})}{|t-s|^{\mathfrak{h}}} \tag{7}$$

$$C^{\mathfrak{h}\text{-Höl}}([0,1], G^{(2)}(V)) := \left\{ \mathbf{X} \in C([0,T], G^{(2)}(V));\ d_{\mathfrak{h}\text{-Höl}}(\mathbf{X}, o) < \infty \right\}$$

Proposition (Prop. 8.12 of Friz&Victoir Book (2010))

Suppose $1/3 < \mathfrak{h} \le 1/2$, $\mathbf{X} \in C^{\mathfrak{h}\text{-Höl}}([0,T], G^{(2)}(V))$ *and* $\mathbf{X}_0 = o = (1,0,0)$. *Then there exists a sequence* $(X^{(n)}) \subset C^{1\text{-var}}([0,T], V)$, $n \in \mathbb{N}$, *such that* $\mathrm{lift}(X^{(n)}) \to \mathbf{X}$ *uniformly as* $n \to \infty$, *i.e.*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [0,T]} d_{\mathrm{CC}}(\mathbf{X}_t, \mathrm{lift}(X^{(n)})_t) = 0.$$

If $1/3 < \mathfrak{h} \le 1/2$, $C^{\mathfrak{h}\text{-Höl}}([0,1], G^{(2)}(V))$ is called the space of **weak geometric $\mathfrak{h}$-Hölder rough paths**.

Let $X^{(j)} = X^{(j)}_{\mathfrak{c}}$ $(j \geq -1)$ be the $\mathfrak{g}$-valued process defined by (3), and $\mathbf{X}^{(j)}_{\mathfrak{c}} = (1, X^{(j)}_{\mathfrak{c}}, \mathbb{X}^{(j)}_{\mathfrak{c}}) := \mathrm{lift}(X^{(j)}_{\mathfrak{c}}) \in C^{\mathfrak{h}\text{-Höl}}([0,1], G^{(2)}(\mathfrak{g}))$.
Using Thm. A.12 (p.583) in Friz&Vitoir(2010), we have

Lemma (Uniform rough path bounds in L^p)

Let $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_\infty$, $q \in [1, \infty)$ and $\mathfrak{h} \in (1/3, 1/2)$. Then

$$\sup_{j \geq -1} \left\| d_{\mathrm{CC};\mathfrak{h}\text{-Höl}:[0,1]}(\mathbf{X}^{(j)}_{\mathfrak{c}}, o) \right\|_{L^q(\mathbb{P})} < \infty.$$

Using Prop. A.15 (p.587) in Friz&Vitoir(2010), we have

Lemma (pointwise L^p convergence)

For each $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_\infty$, $q \in [1, \infty)$ and $0 \leq t \leq 1$, $\mathbf{X}^{(j)}_{\mathfrak{c},t}$ converges to an element $\mathbf{X}_{\mathfrak{c},t} \in C^{\mathfrak{h}\text{-Höl}}([0,1], G^{(2)}(\mathfrak{g}))$ in L^q, that is,

$$\lim_{j \to \infty} \left\| d_{\mathrm{CC}}(\mathbf{X}^{(j)}_{\mathfrak{c},t}, \mathbf{X}_{\mathfrak{c},t}) \right\|_{L^q(\mathbb{P})} = 0.$$

Theorem (Existence and uniqueness of RDE solution; step-2 case of Thm. 10.14 with Thm. 10.26 in Friz&Victoir book (2010))

Let $d, e \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{h} \in (1/3, 1/2]$ *, and assume the following:*
(i) $\mathcal{V} : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^d)$ *is in* $\mathrm{Lip}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^e)$*, where* $\gamma > 1/\mathfrak{h}$*,*
(ii) $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *is a sequence in* $C^{1\text{-var}}([0,T], \mathbb{R}^d)$*, such that*
$\sup_n d_{\mathrm{CC};\mathfrak{h}\text{-Höl};[0,T]}\left(\mathrm{lift}(x^{(n)}), o\right) < \infty$.
(iii) $\mathbf{x} \in C^{\mathfrak{h}\text{-Höl}}([0,T], G^{(2)}(\mathbb{R}^d))$ *satisfies*
$\lim_{n\to\infty} d_{\mathrm{CC};0\text{-Höl};[0,T]}(\mathrm{lift}(x^{(n)}), \mathbf{x}) = 0$.
(iv) $y_0^{(n)} \in \mathbb{R}^e$ *is a sequence converging to some* y_0.
(v) $y^{(n)}$ *is the solution of the ODE*

$$dy^{(n)}(t) = \mathcal{V}(y^{(n)}(t))dx^{(n)}(t), \quad y^{(n)}(0) = y_0^{(n)}$$

Then, there exists a unique $y \in C([0,T], \mathbb{R}^d)$ *s.t.*

$$\operatorname*{lim\text{-}sub}_{n\to\infty} y^{(n)} = y \quad \text{in } L^\infty.$$

($\mathrm{lim\text{-}sub}_{j\to\infty} y_j = y \iff$ 列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束する部分列が存在し、その極限値 y が一意である)

部分的結果(より詳しく)

Let W be a $\mathfrak{g}$-valued standard Gaussian white noise on $\mathbb{R}^2$.
$W^{(j)} := S_j W$. Define the Ω^1-valued random variable
$A^{(j)} = A_1^{(j)} dx_1 + A_2^{(j)} dx_2 \in \Omega^1$ $(A_1^{(j)}, A_2^{(j)} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathfrak{g}))$ by

$$A_1^{(j)}(x) \equiv 0, \quad A_2^{(j)}(x) := \int_0^{x^1} W^{(j)}(\xi, x_2) d\xi, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

and define $\mathscr{U}_{\mathfrak{c}, A^{(j)}} : \mathbb{R} \to G = SU(\nu)$ by (1).

Theorem

任意の有限部分集合 $\Gamma \subset \mathfrak{C}_\infty$ に対して

$$\mathbb{P}\left[\forall \mathfrak{c} \in \Gamma,\ \mathscr{U}_{\mathfrak{c}} := \operatorname*{lim\text{-}sub}_{j\to\infty} \mathscr{U}_{\mathfrak{c}, A^{(j)}} \ (in\ L^\infty) \in C([0,1], G)\right] = 1.$$

上の G 値確率変数 $\mathscr{U}_{\mathfrak{c}}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の YM 理論の Wilson loops の確率法則をみたす(はず)。

追記（所感）

$\mathbb{R}^2$ 上の YM 理論は、物理的には「自明な場」と言われるものである。「自明な場」は「自由場」（相互作用の入っていない場）とほぼ同義であり、物理的にはあまり面白くない対象である。
しかし、「物理的に自明」であっても、数学的には自明とは程遠く、詳細に追究するとまだよくわかってないことが多いと感じさせる。純数学的関心からも、この不明な点を追究していくのはそれなりに価値のあることと思われる。
しかし、「物理的に自明」なモデルばかりに長期間専念することにはやはり空しさも感じざるを得ない。そこで、似た方向性ではあるが別のテーマを並行して研究していく予定。
方向性： Feynman の「経路積分」のアイデアは Feynman–Kac の定理によって部分的に正当化されたが、 それ以後も「より完全な正当化」に向けてこれまで様々な試行がなされてきた。経路の smooth approximation のアイデア自体は古いものであろうが、rough path theory とくに Hairer, GIP らの寄与によって新しい可能性が開けたので、これを利用しない手はないと思われる。