

Malliavin calculus for conditional intensities of Hawkes processes

竹内 敦司*

(大阪市立大学大学院理学研究科)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし, $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とおく. $\{\tau_k; k \geq 1\}$ は $\tau_k < \tau_{k+1}$ a.s. を満たす simple point process とし, 対応する counting process を

$$\left\{ N_t = \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{(0, t]}(\tau_k); t \geq 0 \right\}$$

で表す. 次に, $\{Z_k; k \geq 1\}$ は独立で同分布に従う $\mathbb{R}_0$ -値確率変数列で, $\{N_t; t \geq 0\}$ と独立であり, その密度関数 $f(z) := \mathbb{P}[Z_1 \in dz]/dz$ は滑らかで, $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 0$ を満たすものとする. marked point process $\{(\tau_k, Z_k); k \geq 1\}$ に対応する marked counting process を

$$\left\{ L((0, t], A) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{(0, t]}(\tau_k) \mathbb{I}_A(Z_k); t \geq 0, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0) \right\}$$

で表す. このとき, $\{L((0, t], A); t \geq 0, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)\}$ の conditional intensity $\{\lambda(t, A); t \geq 0, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)\}$ が

$$\lambda(t, A) = \pi(A) + \sum_{k \geq 1} h(t - \tau_k) \mathbb{I}_{(0, t]}(\tau_k) \mathbb{I}_A(Z_k) \quad (1)$$

$$\left(=: \pi(A) + \int_0^t \int_A h(t-s) L(ds, dz) \right)$$

を満たすとき, $\{L((0, t], A); t \geq 0, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)\}$ は (marked) Hawkes process と呼ばれる. ただし, $\pi(dz)$ は $\mathbb{R}_0$ 上の有限測度とし, $h: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ は有界可測関数で,

$$\|h\|_1 \left(:= \int_0^{+\infty} h(s) ds \right) < 1 \quad (2)$$

*E-mail address: takeuchi@sci.osaka-cu.ac.jp

を満たすものとする．さらに，関数 $\ell \in C_b^1(\mathbb{R}_0; [0, +\infty))$ に対して，

$$L_t = \sum_{k \geq 1} \ell(Z_k) \mathbb{I}_{(0, t]}(\tau_k) \left(=: \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \ell(z) L(ds, dz) \right), \quad (3)$$

$$\lambda_t = \int_{\mathbb{R}_0} \ell(z) \lambda(t, dz) \quad (4)$$

で定まる確率過程 $\{L_t; t \geq 0\}$, $\{\lambda_t; t \geq 0\}$ を考える． $\mu = \int_{\mathbb{R}_0} \ell(z) \pi(dz)$ とおくと，(1) より

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \mu + \sum_{k \geq 1} h(t - \tau_k) \ell(Z_k) \mathbb{I}_{(0, t]}(\tau_k) \\ &\left(= \mu + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} h(t - s) \ell(z) L(ds, dz) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

を得る．

本講演では，確率過程 $\{\lambda_t; t \geq 0\}$ に対して Malliavin 解析を適用し， $\{N_t \geq 1\}$ の下での部分積分公式について考察する．ジャンプ型確率過程に対する Malliavin 解析には，Bismut の方法（Girsanov 変換によるアプローチ）や Picard の方法（差分作用素を用いた方法）など，目的に応じた幾つかの方法がよく知られているが，本講演では，ジャンプの大きさを表す確率変数列 $\{Z_k; k \geq 1\}$ に注目した解析に焦点を当てて考えることにする．

定理 1 $T > 0$ とし，条件 (2) と以下の三つの条件が成り立つとする：

- (i) $\ell'(0) = 0$,
- (ii) コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}_0$ および定数 $C_1 > 0$ が存在して， $\inf_{z \in K} |\ell'(z)| \geq C_1$,
- (iii) 定数 $C_2 > 0$ が存在して， $\inf_{t \in [0, T]} h(t) \geq C_2$.

このとき $0 < t \leq T$ および $\phi \in C_b^1(\mathbb{R})$ に対して，次の等式が成り立つ：

$$\mathbb{E}[\phi'(\lambda_t) \mathbb{I}(N_t \geq 1)] = \mathbb{E}[\phi(\lambda_t) \Theta_t \mathbb{I}(N_t \geq 1)], \quad (6)$$

$$\Theta_t = - \sum_{j=1}^{N_t} \frac{1}{f(Z_j)} \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{h(t - \tau_j) \ell'(z_j) f(z_j)}{\sum_{k \neq j} h(t - \tau_k)^2 \ell'(Z_k)^2 + h(t - \tau_j)^2 \ell'(z_j)^2} \right) \Big|_{z_j = Z_j}. \quad (7)$$

□

さらに定理 1 を用いた幾つかの応用例について，講演の中で紹介する予定である．

References

- [1] P. Brémaud, G. Nappo and G. L. Torrisi: *J. Appl. Probab.* **39** (2002).
- [2] A. G. Hawkes: *Biometrika* **58** (1971).
- [3] T. Jaisson and M. Rosenbaum: *Ann. Appl. Probab.* **25** (2015).