Kolmogorov 拡散過程のスペクトル

重川 一郎　京都大学

1　導入

$\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}$ で生成される拡散過程考える．特に a が 2 次式で， b が 1 次式の場合を Kolmogorov 拡散過程とよぶ．（Pearson-Kolmogorov 拡散過程と呼ぶこともある．）Pearson の名前を付けるのは，拡散過程のその標準測度が Pearson 分布になることによる．また，固有関数が多項式になるものを考えるとき，a, b の仮定は，自然なものであろう．ここでは，Kolmogorov 拡散過程のスペクトルについて論じる．

2　Pearson 分布族

まず密度 ρ が次のような形をしている分布を Pearson 分布族という．

$$\rho(x) = \exp\left\{\int \frac{g(x)}{f(x)}\right\} dx. \tag{1}$$

ここで $g(x)$ は 1 次式で，$f(x)$ は 2 次式である．所与の区間で $f > 0$ を仮定している．特に ρ が確率密度のときを Pearson 分布族と言うが，ここでは特に正規化されてなくてもよいし，無限の測度を持つ場合も一緒に考えることにする．(1) の形の関数を Pearson 密度と総称する．

確率密度で言うと

	密度関数	区間
1	$e^{-\beta x^2/2}$	$\mathbb{R}$
2	$x^\alpha e^{-\beta x}$	$(0,\infty)$
3	$x^\alpha(1-x)^\beta$	$(0,1)$
4	$(1+x^2)^\alpha \exp\{\beta \arctan x\}$	$\mathbb{R}$
5	$x^\alpha e^{-\beta/x}$	$(0,\infty)$
6	$x^\alpha(1+x)^\beta$	$(0,\infty)$

となる．これらはいくつかの（特に統計で）重要な分布を含んでいる。これは少し違った観点から次のような分類も可能である．

	完全系列	不完全系列
α-系列	正規分布	t-分布
β-系列	ガンマ分布	極値分布
γ-系列	ベーター分布	F-分布 & Pareto 分布

3 生成作用素の表現と双対性

1 次元の拡散過程の生成作用素は

$$\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} \tag{2}$$

と表される．このとき，a が二次式で，b が 1 次式のとき，Feller の意味での標準測度が Pearson 分布になることを Kolmogorov が注意している．そこで，この形の拡散過程を Kolmogorov diffusion あるいは Pearson-Kolmogorov diffusion と呼ぶことにする．

生成作用素 $\mathfrak{A}$ の表現には，いくつかの流儀がある．これを次のように分類する．

名前	生成作用素	双対性	微分作用素
Kolmogorov	$a\dfrac{d^2}{dx^2} + b\dfrac{d}{dx}$		
Feller	$\dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds}$	$\dfrac{d}{dm} = -\dfrac{d}{ds}^*$	$\dfrac{d}{ds} : L^2(dm) \to L^2(ds)$
Stein	$\left(a\dfrac{d}{dx} + b\right)\dfrac{d}{dx}$	$a\dfrac{d}{dx} + b = -\dfrac{d}{dx}^*$	$\dfrac{d}{dx} : L^2(\rho) \to L^2(a\rho)$

上の Feller の双対性と，Stein の双対性から次のような対応が作られる．

Feller's pair	$\dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds} \longleftrightarrow \dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds}$
Stein's pair	$(a\dfrac{d}{dx} + b)\dfrac{d}{dx} \longleftrightarrow \dfrac{d}{dx}(a\dfrac{d}{dx} + b)$

一つの特徴として Kolmogorov 拡散過程は，上の Feller's pair, Stein's pair で閉じていることが証明できるので，自然なクラスであることが分かる．

また Feller's pair, Stein's pair は超対称性にもとづく物なので次のことが分かる．

- f が固有関数なら f', $\frac{d}{ds}f$ も固有関数になる．
- θ が固有関数なら $a\theta' + b\theta$, $\frac{d}{dm}\theta$ も固有関数になる．

これらの事実が具体例でどうなっているかを講演の中でいくつか紹介する．

References

[1] A. Kolmogoroff, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, (German) Math. Ann., **104** (1931), no. 1, 415–458.