

屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題

野場 啓 (京都大学大学院理学研究科)

1 序

実数値の確率過程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ がある区間から脱出する時刻の分布を特徴づける問題を X に対する脱出問題という. ここでは, 二つの実数 $a > b$ と非負実数 $q \geq 0$, X の通過時刻 $\tau_a^+ = \inf\{t > 0 : X_t > a\}$, $\tau_b^- = \inf\{t > 0 : X_t < b\}$ に対し, 期待値 $\mathbb{E}_0^X \left(e^{-q\tau_a^+} 1_{(\tau_a^+ < \tau_b^-)} \right)$ を求める問題を考える.

X を spectrally negative な Lévy 過程としたとき, X に対する脱出問題はスケール関数を用いて表すことができる. スケール関数は, X の Laplace 指数を用いて Laplace 変換により定義される. また, 脱出問題の応用として, ポテンシャル測度をスケール関数を用いて表すことができる.

Kyprianou and Loeffen [2] は, 屈折 Lévy 過程 U に対する脱出問題を論じた. 彼らの屈折 Lévy 過程 U は, 値 0 を超えるまでは spectrally negative な Lévy 過程 X に従って動き, 0 を超えたときに下向きにドリフト α がかかる. 詳しく言うと, spectrally negative な Lévy 過程 X に対し, 屈折 Lévy 過程 $U = \{U_t : t \geq 0\}$ は, 確率微分方程式

$$U_t - U_0 = X_t - \alpha \int_0^t 1_{\{U_s > 0\}} ds, \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

の解として定義される.

本講演では [3] に基づき, まず Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程を一般化した確率過程, つまり X, Y を異なる spectrally negative な Lévy 過程として, 正の値をとるときは X の挙動を, 負の値をとるときは Y の挙動をする確率過程 U を定義する. 詳しく述べると, 確率過程 U を, X が有界変動な標本路を持つときは X と Y を独立として, 確率微分方程式

$$U_t - U_0 = \int_{(0,t]} 1_{\{U_{s-} \geq 0\}} dX_s + \int_{(0,t]} 1_{\{U_{s-} < 0\}} dY_s, \quad (1.2)$$

の解として定義する. また, X が非有界変動な標本路をもち Gaussian part を持たないときは停止過程の法則 $\mathbb{P}_x^{U^0}$ と周遊測度 n^U を任意の正可測汎関数 F に対し

$$\mathbb{P}_x^{U^0} \left(F \left((U_t)_{t < \tau_0^-}, (U_{t+\tau_0^-})_{t \geq 0} \right) \right) = \mathbb{P}_x^X \left(\mathbb{E}_y^{Y^0} \left(F(w, (Y_t^0)_{t \geq 0}) \right) \Big|_{\substack{y=X(\tau_0^-) \\ w=(X(t))_{t < \tau_0^-}} \right) \quad x \neq 0 \quad (1.3)$$

$$n^U \left(F \left((U_t)_{t < \tau_0^-}, (U_{t+\tau_0^-})_{t \geq 0} \right) \right) = n^X \left(\mathbb{E}_y^{Y^0} \left(F(w, (Y_t^0)_{t \geq 0}) \right) \Big|_{\substack{y=X(\tau_0^-) \\ w=(X(t))_{t < \tau_0^-}} \right) \quad (1.4)$$

を満たすものとして定義し, 上記のような確率過程 U を周遊理論を用いて構成する. ただし, Y^0 は Y の 0 での停止過程を, n^X は X の 0 での周遊測度を表す. さらに, 本講演では複合 Poisson 過程による近似と脱出問題, ポテンシャル測度について考察する.

2 Spectrally negative な Lévy 過程の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度

この節では, 主結果を述べるのに必要な記号と Spectrally negative な Lévy 過程に関する先行研究をまとめる. 主結果は講演において述べる. $X = \{X_t : t \geq 0\}$ を spectrally negative な Lévy 過程で, $-X$ が subordinator ではないものとする. X の Laplace 指数を

$$\psi_X(\lambda) := \log \mathbb{E}_0^X(e^{\lambda X_1}), \quad \lambda \geq 0 \quad (2.1)$$

で定義する. またその逆関数を

$$\Phi_X(\theta) = \inf\{\lambda \geq 0 : \psi_X(\lambda) = \theta\}, \quad \theta \geq 0 \quad (2.2)$$

で定義する. 任意の非負実数 $q \geq 0$ に対し, q -スケール関数 $W_X^{(q)} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を, $(-\infty, 0)$ 上では $W_X^{(q)} = 0$ であり, $[0, \infty)$ 上では連続で, Laplace 変換が

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W_X^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi_X(\beta) - q}, \quad \beta > \Phi(q) \quad (2.3)$$

を満たす関数として定義する.

定理 2.1 (X に対する脱出問題). $a \geq x > 0$ と $q \geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}_x^X \left(e^{-q\tau_a^+} 1_{(\tau_a^+ < \tau_0^-)} \right) = \frac{W_X^{(q)}(x)}{W_X^{(q)}(a)} \quad (2.4)$$

が成り立つ.

定理 2.2 (消滅過程のポテンシャル測度). $a \geq x > 0$ と $q \geq 0$ および Borel 集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し,

$$\int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}_x^X(X_t \in A, \tau_a^+ \wedge \tau_0^- > t) dt = \int_A \left(\frac{W_X^{(q)}(x) W_X^{(q)}(a - y)}{W_X^{(q)}(a)} - W_X^{(q)}(x - y) \right) dy \quad (2.5)$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] A. E. Kyprianou. Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Introductory lectures. Second edition. Universitext. Springer, Heidelberg, 2014. xviii+455 pp.
- [2] A. E. Kyprianou and R. L. Loeffen. Refracted Lévy processes. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 46 (2010), no. 1, 24–44.
- [3] K. Noba and K. Yano Generalized refracted Lévy process and its application to exit problem. arXiv:1608.05359, August 2016.