

Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs

難波 隆弥 (岡山大学) e-mail: sc422113@s.okayama-u.ac.jp
(石渡 聡氏 (山形大学) および河備 浩司氏 (岡山大学) との共同研究)

1 はじめに

グラフ上のランダムウォーク (RW) は現在盛んに研究が進展している対象で、多くの分野からのアプローチが図られている。特に周期性を持つ無限グラフ、例えば結晶格子上の RW については多くの研究がなされている。ここに X が結晶格子であるとは、捩れのない有限生成アーベル群 Γ が X に自由作用し、その作用による商グラフ $X_0 := \Gamma \backslash X$ が有限グラフであるときをいう。小谷-砂田は離散幾何解析の手法を経由して結晶格子上の RW を研究し、その中で周期的実現 $\Phi_0 : X \rightarrow \Gamma \otimes \mathbb{R}$ の (修正) 調和性とよばれる概念を定めた ([3])。石渡-河備-小谷は [2] の中で結晶格子上の非対称 RW を考察し、修正調和性の仮定の下、2 種類の汎関数中心極限定理を得ている。

一方、石渡は被覆変換群 Γ が捩れのない有限生成べき零群であるような被覆グラフ (べき零被覆グラフ) X 上の対称 RW について議論し、 Γ を格子として含むべき零 Lie 群 G への周期的実現 $\Phi_0 : X \rightarrow G$ の調和性を定め、この下で推移半群に関する中心極限定理を得ている ([1]) もの、プロセスレベルでの収束に関しては示されていない。

本講演では、べき零被覆グラフ上の非対称 RW を扱い、その G への周期的実現の修正調和性を定義する。その仮定の下、石渡による結果 ([1]) が非対称の場合にも拡張できることを述べる。その上プロセスレベルでの収束も導かれること、すなわち汎関数中心極限定理が得られることを報告する。

2 べき零被覆グラフとその周期的実現の修正調和性

以下、べき零被覆グラフ $X = (V, E)$ (V : 頂点集合, E : 向きつき辺の集合) 上の RW を考察する。 $e \in E$ に対して、 $o(e), t(e), \bar{e}$ でそれぞれ辺 e の始点、終点、 e の逆向きの辺を表し、 $E_x := \{e \in E \mid o(e) = x\}$ ($x \in V$) とする。いま、 $p : E \rightarrow (0, 1]$ を Γ -不変な推移確率とし、それから定まる RW を $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ とするが、 p の Γ -不変性に注意し、商グラフ $X_0 = (V_0, E_0)$ 上の RW $\{\pi(w_n)\}_{n=0}^\infty$ も考察する。ここに、 $\pi : X \rightarrow X_0$ は被覆写像である。また $m : V_0 \rightarrow (0, 1]$ を V_0 上の (正規化) 不変測度とし、その X 上への Γ -不変なリフトをも $m : V \rightarrow (0, 1]$ で表す。さて $H_1(X_0, \mathbb{R}), H^1(X_0, \mathbb{R})$ を各々 X_0 の 1 次ホモロジー群、1 次コホモロジー群とする。いま、 X_0 上の RW に対して、homological direction を $\gamma_p := \sum_{e \in E_0} p(e)m(o(e))e \in H_1(X_0, \mathbb{R})$ で定める。また X_0 上の RW が (m -) 対称であることを $p(e)m(o(e)) = p(\bar{e})(t(e))$ ($e \in E_0$) が成り立つときと定めるが、これは $\gamma_p = 0$ と同値である。

さて、Mal'cev の定理より連結かつ単連結なべき零 Lie 群 G で、 Γ がその格子と同型であるものがとれる。そこで X を周期的に実現する連続モデルとして我々は G を採用する。また、以

下では G がステップ 2 の自由べき零 Lie 群であると仮定する. つまり, G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ が直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$ をもつ. いま, 被覆写像 π を介し自然な全射準同型 $\rho_{\mathbb{R}} : H_1(X_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{g}^{(1)}$ をとる. 一方, Hodge-小平の定理によれば $H^1(X_0, \mathbb{R})$ 上には X_0 上の (修正) 調和 1-形式の空間から, p により定まる内積が誘導できる. これは $\rho_{\mathbb{R}}$ を用いて $\mathfrak{g}^{(1)}$ 上に誘導でき, それより定まる平坦計量を Albanese 計量とよんで g_0 で表す. さて X の周期的実現 $\Phi_0 : X \rightarrow G$ の (修正) 調和性を

$$\sum_{e \in E_x} p(e) \log \left(\Phi_0(o(e))^{-1} \cdot \Phi_0(t(e)) \right) \Big|_{\mathfrak{g}^{(1)}} = \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) \quad (x \in V). \quad (1)$$

で定義する. (1) の右辺の量を *asymptotic direction* とよぶ. ここで RW が対称, つまり $\gamma_p = 0$ のときは $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = 0_{\mathfrak{g}}$ であるが, 逆は一般に成立しないことに注意する.

3 主結果

以下べき零被覆グラフ X の修正調和実現 $\Phi_0 : X \rightarrow G$ で, 基点 $x_* \in V$ に対し $\Phi_0(x_*) = 1_G$ なるものをとる. いま, $\mathfrak{g}$ 上の RW を $\Xi_n := \log(\Phi_0(w_n))$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で定め, G -値連続確率過程列 $\{\mathcal{Y}_t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ を $\mathcal{Y}_t^{(n)} := \tau_{n-1/2}(\exp(\mathfrak{X}_t^{(n)}))$ ($t \in [0, 1]$) で定義する. ここに τ_{ε} ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) は G 上の dilation で, $\mathfrak{X}_t^{(n)} := \Xi_{[nt]} + (nt - [nt])(\Xi_{[nt]+1} - \Xi_{[nt]})$ である. ここで $\{V_1, \dots, V_d\}$ を $(\mathfrak{g}^{(1)}, g_0)$ の正規直交基底とする. このとき, G が自由という仮定から $\{[V_i, V_j] : 1 \leq i < j \leq d\}$ が $\mathfrak{g}^{(2)}$ の基底を与えることに注意する. また, $\tilde{e}$ を $e \in E_0$ の X 上へのリフトとして

$$\beta(\Phi_0) := \sum_{e \in E_0} p(e) m(o(e)) \log \left(\Phi_0(o(\tilde{e}))^{-1} \cdot \Phi_0(t(\tilde{e})) \right) \Big|_{\mathfrak{g}^{(2)}} = \sum_{1 \leq i < j \leq d} \beta(\Phi_0)^{ij} [V_i, V_j]$$

とおく. $\gamma_p = 0 \implies \beta(\Phi_0) = 0_{\mathfrak{g}}$ に注意せよ. また, $(Y_t)_{t \geq 0}$ を 1_G 出発の G -値拡散過程で次の SDE

$$dY_t = \sum_{1 \leq i \leq d} V_i(Y_t) \circ dB_t^i + \beta(\Phi_0)(Y_t) dt$$

の解とする. ただし, $(B_t)_{t \geq 0} = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t \geq 0}$ は $\mathbb{R}^d$ -値標準 Brown 運動である. また, この SDE に対応する生成作用素を $\mathcal{A} := (1/2) \sum_{1 \leq i \leq d} V_i^2 + \beta(\Phi_0)$ とする. このとき次の定理を得た.

定理 1 $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = 0_{\mathfrak{g}}$ とする. このとき $t \geq 0$ および $f \in C_{\infty}(G)$ に対して, 次の中心極限定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L^{[nt]} P_{n-1/2} f - P_{n-1/2} e^{-t\mathcal{A}} f \right\|_{\infty}^X = 0$$

が成り立つ. ここに L は X 上の推移作用素であり, P_{ε} ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) はスケール作用素である. さらに汎関数中心極限定理: $(\mathcal{Y}_t^{(n)})_{t \geq 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (Y_t)_{t \geq 0}$ in $C_{1G}([0, 1]; G)$ が成り立つ.

時間が許せば, 定理の証明および具体的なべき零被覆グラフ上の RW の例についても触れたい.

参考文献

- [1] S. Ishiwata: J. Math. Soc. Japan **55** (2003), pp. 837–853.
- [2] S. Ishiwata, H. Kawabi and M. Kotani: arXiv:1510.05102.
- [3] M. Kotani and T. Sunada: Math. Z. **254** (2006), pp. 837–870.