Hairer 理論による Φ^4_3 モデルへのアプローチの概説

星野壮登（Masato Hoshino）

東京大学

November 10, 2016

1. 序論
2. 正則性構造理論
   - 一般論
   - Φ^4_3 モデルへの応用
3. 繰り込み群

1 序論

2 正則性構造理論
- 一般論
- Φ^4_3 モデルへの応用

3 繰り込み群

Φ^4_3 モデル

- Φ^4_3 モデル（周期境界条件で考える）

$$\partial_t u = \Delta u - u^3 + Cu + \xi, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3.$$

- ξ が時空ホワイトノイズのとき, u は超関数となり非線形項を通常の意味で定義できない.
- **目標**：滑らかな関数による近似 $\xi_\epsilon \to \xi$ $(\epsilon \downarrow 0)$ に置き換え, 適当な定数 $C_\epsilon \to \infty$ を選んで

$$\partial_t u_\epsilon = \Delta u_\epsilon - u_\epsilon^3 + C_\epsilon u_\epsilon + \xi_\epsilon$$

の解 u_ϵ が普遍的な極限 u を持つことを示す.

Gubinelli-Imkeller-Perkowski 理論の考え方

- u を次のように分解する

$$u = \mathrm{I} - \Psi + u' \varolessthan \mathrm{Y} + u^{\#}.$$

$\mathrm{I}, \Psi, \mathrm{Y}$ は ξ から直接定義された関数 (enhanced drivers), $u', u^{\#}$ は十分良いレギュラリティを持つ未知関数 (enhanced solution).

- Controlled path theory や GIP theory の考え方
  1. 適当な確率空間 (Ω, P) 上に時空ホワイトノイズ ξ を用意.
  2. $\Xi = (\mathrm{I}, \mathrm{V}, \Psi, \dots)$: 必要十分な enhanced drivers を定義. (deterministic part 1)
  3. 与えられた Ξ から, 不動点問題の解として enhanced solution $(u', u^{\#})$ を導く. (deterministic part 2)
  4. (Ω, P) 上に Ξ 値の標準的な確率変数を導入. (probabilistic part)

- レギュラリティの捉え方を変える．
- Enhanced drivers $\Xi = (\mathsf{I}, \mathsf{V}, \Psi, \dots)$
  $\leftrightarrow$ Abstract symbols $\mathcal{F} = (\mathsf{I}, \mathsf{V}, \Psi, \dots)$, モデル $Z = (\Pi, \Gamma)$.
- Enhanced solution $u = \mathsf{I} - \Psi + u' \varolessthan \mathsf{Y} + u^{\#}$
  $\leftrightarrow$ モデル関数 (modelled distribution)： $T = \langle \mathcal{F} \rangle$ 値の関数

$$u(t,x) = \sum_{\tau \in \mathcal{F}} u_\tau(t,x)\tau,$$

復元 (reconstruction) $\mathcal{R} : u \mapsto u$.

- Probabilistic part
  $\leftrightarrow \xi$ から $Z = (\Pi, \Gamma)$ への持ち上げ，その繰り込み（GIP 理論より高度な代数を用いる）．

1 序論

2 正則性構造理論
- 一般論
- Φ_3^4 モデルへの応用

3 繰り込み群

関数の Taylor 展開

- 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{C}^\gamma$ $(\gamma > 0)$ に属する $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists \{f^{(k)}\}_{k=0,1,\dots,\lfloor\gamma\rfloor}$

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\lfloor\gamma\rfloor} f^{(k)}(x)(y-x)^k + \mathcal{O}(|y-x|^\gamma)$$

これを抽象化：

$$\color{blue}{f}(x) = \sum_{|k|<\gamma} f^{(k)}(x)\color{blue}{X}^k.$$

- $\Pi_x \color{blue}{X}(y) = (y-x)^k$ と定義すると

$$|f(y) - (\Pi_x \color{blue}{f}(x))(y)| \lesssim |y-x|^\gamma.$$

- $\Gamma_{yx}\color{blue}{X}^k = (\color{blue}{X} + (y-x)\color{blue}{\mathbf{1}})^k$ と定義すると

$$\|\color{blue}{f}(y) - \Gamma_{yx}\color{blue}{f}(x)\|_{\color{blue}{X}^k} \lesssim |x-y|^{\gamma-|k|}.$$

$X, Y \in \mathcal{C}^\gamma$ $(\gamma \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}))$ に対して積 $\dot{Z} = Y\dot{X}$ $(\Leftrightarrow$ 線積分 $Z = \int YdX)$ を定義したい.

- $(X, \mathbb{X})$: γ-Hölder ラフパス $(\mathbb{X}_{st} = \mathbb{X}_{su} + \mathbb{X}_{ut} + X_{su}X_{ut})$.
- (Y, Y') : γ-被制御パス $(Y_{st} = Y'_s X_{st} + \mathcal{O}(|t-s|^{2\gamma}))$.
- $Z_{st} = Y_s X_{st} + Y'_s \mathbb{X}_{st} + \mathcal{O}(|t-s|^{3\gamma}) \Rightarrow \dot{Z}_t \sim Y_s \dot{X}_t + Y'_s \partial_t \mathbb{X}_{st}$.

これを抽象化：

$$\dot{Z}(s) = Y_s \dot{X} + Y'_s \dot{\mathbb{X}}.$$

- $\Pi_s \dot{X}(t) = \dot{X}_t$, $\Pi_s \dot{\mathbb{X}}(t) = \partial_t \mathbb{X}_{st}$ と定義すると

$$|\langle \dot{Z} - \Pi_s \dot{Z}(s), \varphi_s^\lambda \rangle| \lesssim \lambda^{3\gamma-1}.$$

- $\Gamma_{us}\dot{X} = \dot{X}$, $\Gamma_{us}\dot{\mathbb{X}} = \dot{\mathbb{X}} + X_{su}\dot{X}$ と定義すると

$$\|\dot{Z}(u) - \Gamma_{us}\dot{Z}(s)\|_{\dot{X}} = |Y_u - Y_s - Y'_s X_{su}| \lesssim |u-s|^{2\gamma},$$
$$\|\dot{Z}(u) - \Gamma_{us}\dot{Z}(s)\|_{\dot{\mathbb{X}}} = |Y'_u - Y'_s| \lesssim |u-s|^{\gamma}.$$

正則性構造理論の考え方

- 関数をレギュラリティによって展開.（GIP 理論と同じ）
- レギュラリティのみを表す記号を導入する.
- 展開の詳しい性質は記号への作用 Π_x, Γ_{yx} に込める．それぞれ
  - Π_x は x の周りでのレギュラレティィを表す.
  - Γ_{yx} は展開の中心を x から y に移すときの変化を表す.
- 元の関数 f の展開を抽象化した f は条件

$$\|f(y) - \Gamma_{yx} f(x)\|_\tau \lesssim |x-y|^{\gamma-|\tau|}$$

を満たす．逆にこの条件があれば元の関数を復元できる.

正則性構造

定義

$\mathcal{T} = (A, T, G)$ が**正則性構造** *(regularity structure)* であるとは,

1. $A \subset \mathbb{R}$ は 0 を含み下から有界で局所有限,
2. $T = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$ は有限次元ノルム空間 T_α の直和,
3. G は T 上の有界作用素の群で, $\forall \Gamma \in G, \forall \tau \in T_\alpha$ に対し

$$\Gamma\tau \in \tau + \bigoplus_{\beta < \alpha} T_\beta$$

を満たすことをいう.

- $|\tau|$: $\tau \in T_\alpha$ の次数 α.
- $\|\tau\|_\alpha$: $\tau \in T$ の T_α 成分のノルム.

モデル

- $s = (s_i)_{i=1}^d \in \mathbb{N}_{>0}^d$, $|s| = \sum_{i=1}^d s_i$.
- $|k|_s = \sum_{i=1}^d s_i k_i$, $k \in \mathbb{N}^d$.
- $\|z\|_s = \sum_{i=1}^d |z_i|^{1/s_i}$, $z \in \mathbb{R}^d$.
- $\varphi_z^\lambda(z') = \lambda^{-|s|}\varphi(\lambda^{-s_1}(z_1' - z_1), \dots, \lambda^{-s_d}(z_d' - z_d))$.

定義

写像の族 $\Pi = \{\Pi_z \in \mathcal{L}(T, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))\}_{z\in\mathbb{R}^d}$ と $\Gamma = \{\Gamma_{zz'} \in G\}_{z,z'\in\mathbb{R}^d}$ で

$$\Gamma_{zz'}\Gamma_{z'z''} = \Gamma_{zz''}, \quad \Pi_z\Gamma_{zz'} = \Pi_{z'}, \quad \forall z, z', z'' \in \mathbb{R}^d$$

を満たし, $\forall\tau \in T_\alpha$, $\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\forall\lambda \in (0, 1]$ に対し

$$|\langle\Pi_z\tau, \varphi_z^\lambda\rangle| \lesssim \lambda^\alpha, \quad \|\Gamma_{zz'}\tau\|_\beta \lesssim \|z - z'\|_s^{\alpha-\beta}, \quad loc\ in\ z, z' \in \mathbb{R}^d$$

を満たすものの組 $Z = (\Pi, \Gamma)$ を**モデル**という.

レギュラリティに関する注意

定義

$\xi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対し, $\xi \in \mathcal{C}_s^\gamma(\mathbb{R}^d) \underset{def}{\Leftrightarrow}$ 各 z において

$$\xi_z(\cdot) = \xi(\cdot) - \sum_{|k|_s<\gamma} \frac{(\cdot - z)^k}{k!} \partial^k \xi(z)$$

とすると, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\forall \delta \in (0,1]$ に対し

$$|\langle \xi_z, \varphi_z^\lambda \rangle| \lesssim \lambda^\gamma, \quad loc\ in\ z \in \mathbb{R}^d.$$

- $C_s^\gamma = \mathcal{B}_{\infty,\infty}^\gamma$ with scaling（局所的な意味で）

モデル関数と復元作用素

定義

$\gamma \in \mathbb{R}$ とする．関数 $f : \mathbb{R}^d \to T$ で $\forall \beta < \gamma$ に対し

$$\|f(z) - \Gamma_{zz'} f(z')\|_\beta \lesssim \|z - z'\|_{\mathfrak{s}}^{\gamma-\beta}, \quad loc \ in \ z, z' \in \mathbb{R}^d$$

を満たすものを**モデル関数** *(modelled distribution)* という．このような関数の全体を $\mathcal{D}^\gamma$ と表す．

定理

$\gamma > 0$ とする．連続作用素 $\mathcal{R} : \mathcal{D}^\gamma \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ で $\forall f \in \mathcal{D}^\gamma$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\forall \lambda \in (0, 1]$ に対し

$$|\langle \mathcal{R} f - \Pi_z f(z), \varphi_z^\lambda \rangle| \lesssim \lambda^\gamma, \quad loc \ in \ z \in \mathbb{R}^d$$

を満たすものが一意的に存在する．$\mathcal{R}$ はモデル $Z = (\Pi, \Gamma)$ についても連続である．（$\mathcal{R}$ を**復元作用素** *(reconstruction operator)* という.）

放物型方程式への応用

- $\partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi,\ u(0,\cdot) = u_0 \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$

$$u = G * \{\mathbf{1}_{t>0}(\xi - u^3)\} + Gu_0.$$

（G：$\partial_t - \Delta$ の熱核）

- $G = K + \hat{K}$：$\mathrm{supp}K$ はコンパクト，$\hat{K} \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$,

$$\int K(z)z^k = 0, \quad |k|_s \leq 2.$$

- モデル関数が満たすべき方程式

$$u = \mathcal{K}\{\mathbf{1}_{t>0}(\Xi - u^3)\} + \hat{\mathcal{K}}\{\mathbf{1}_{t>0}(\Xi - u^3)\} + Gu_0.$$

この方程式に意味を与えるのに必要十分な正則性構造を構成する．

Φ^4_3 に対応する正則性構造の構成

$d = 4$, $z = (t, x)$（t：時間, x：空間）, スケーリング $s = (2, 1, 1, 1)$.

- $\{X_i\}_{i=0}^3$：Taylor 展開に使用するシンボル, $X^k = \prod_{i=0}^3 X_i^{k_i}$,
- Ξ：ξ のシンボル.
- $\mathcal{I}$：K との合成積を表すシンボル.

Φ^4_3 に対応する正則性構造の構成

$\mathcal{T}_{\Phi^4_3} = (A, T, G)$ を次のように構成する.（G は後で構成）

1. 次数：
   1. $|X^k| = |k|_s$, $|\Xi| = -\frac{5}{2} - \kappa$ ($\kappa > 0$ fixed),
   2. $|\mathcal{I}\tau| = |\tau| + 2$ ($\tau \notin \{X^k\}$),
   3. $|\tau\tau'| = |\tau| + |\tau'|$.
2. シンボルの集合：
   1. $\mathcal{W} = \{\Xi\} \cup \{\tau_1\tau_2\tau_3\, ; \tau_i \in \mathcal{U}\}$: $\Xi - u^3$ を表す,
   2. $\mathcal{U} = \{X^k\} \cup \{\mathcal{I}\tau\, ; \tau \in \mathcal{W}\}$: u を表す.
3. $T_\alpha = \langle \tau\, ; |\tau| = \alpha \rangle$.

但し $\mathcal{I}X^k = 0$, $\tau\tau' = \tau'\tau$ を約束.

$\to$ モデル関数は $T = \bigoplus_\alpha T_\alpha$ の上に実現できる.

Admissible なモデル, Schauder 評価

定義

$\mathcal{T}_{\Phi^4_3}$ 上のモデル $Z = (\Pi, \Gamma)$ が *admissible* であるとは,
$(\Pi_z X^k)(z') = (z' - z)^k$ と

$$\Pi_z \mathcal{I}\tau = K * \Pi_z \tau - \sum_{|k|_s < |\tau| + 2} \frac{(\cdot - z)^k}{k!} (\partial^k K * \Pi_z \tau)(z)$$

が成り立つことをいう.

命題

Admissible なモデルに対し, 連続作用素 $\mathcal{K} : \mathcal{D}^\gamma \to \mathcal{D}^{\gamma+2}$ で $\forall u \in \mathcal{D}^\gamma$ に対し

$$\mathcal{K}u - \mathcal{I}u \in \langle X^k \rangle, \quad \mathcal{R}\mathcal{K}u = K * \mathcal{R}u$$

を満たすものが構成される.

解写像

- モデル関数が満たすべき方程式 (Φ^4_3) :

$$u = \mathcal{K}\{\mathbf{1}_{t>0}(\Xi - u^3)\} + \hat{\mathcal{K}}\{\mathbf{1}_{t>0}(\Xi - u^3)\} + Gu_0.$$

以下常に周期境界条件で考える.

定理

Admissible なモデル Z に対し, (Φ^4_3) は一意解 $u \in \mathcal{D}^\gamma$ $(\gamma > 1 + 2\kappa)$ を持つ. 写像 $(u_0, Z) \mapsto u$ は連続である.

元の関数空間への射影

- 連続な関数 ξ を取る．このとき

$$\Pi_z \Xi = \xi, \quad \Pi_z \tau\tau' = \Pi_z \tau \Pi_z \tau'$$

により admissible なモデル Z^ξ が一意的に決まる．対応する解 u の復元 $u = \mathcal{R}u$ は

$$\partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi, \quad u(0, \cdot) = u_0$$

を満たす．

命題

各 $\Pi_z \tau$ が連続なモデルに対し，$\mathcal{R}u(z) = (\Pi_z u(z))(z)$.

- ξ が超関数のとき，積 $\Pi_z \tau \Pi_z \tau'$ は一般に定義できない．

1 序論

2 正則性構造理論
- 一般論
- Φ_3^4 モデルへの応用

3 繰り込み群

Z^ϵ の繰り込み

- $\xi_\epsilon = \xi * \varphi_\epsilon$: 滑らかな関数による近似 $(\varphi_\epsilon(z) = \epsilon^{-5}\varphi(\epsilon^{-s}z))$.
- $Z^\epsilon = Z^{\xi_\epsilon}$: 自然な持ち上げ.
- Z^ϵ は収束しないから適当な変換 $Z^\epsilon \to \hat{Z}^\epsilon$ を施すことを考える.
  1. どのような変換をするべきか.
  2. 変換 $\hat{Z}^\epsilon$ は方程式の形にどう影響するか.

$\hat{Z}^\epsilon$ を導くために, T を張るシンボルを書き出す.

- 縮約 : $\mathcal{I}\Xi = \mathsf{I}$, $(\mathcal{I}\Xi)^2 = \mathsf{V}$, $\mathcal{I}(\mathcal{I}\Xi)^2 = \mathsf{Y}, \dots$
- 考えるべき T は

$$T = \langle \Xi, \Psi, \mathsf{V}, \Psi\!\!\!\Psi, \mathsf{I}, \mathsf{Y}\!\mathsf{V}, \mathsf{V}\!\mathsf{V}, X_1\mathsf{V}, X_2\mathsf{V}, X_3\mathsf{V}, \mathbf{1}, \dots \rangle.$$

$\Pi^{\epsilon}\tau$ の繰り込み（1）

- $\Pi_z^{\epsilon}\mathbf{I} = K * \xi_{\epsilon} = K_{\epsilon} * \xi$（そのままで良い）．
- $\Pi_z^{\epsilon}\mathbf{V} = (K_{\epsilon} * \xi)^2 = \iint K_{\epsilon}(\cdot - z_1)K_{\epsilon}(\cdot - z_2)\xi(z_1)\xi(z_2)dz_1dz_2$. ここで $\xi(z_1)\xi(z_2) =: \xi(z_1)\xi(z_2) : + \delta(z_1 - z_2)$（Wick 積）より

$$\Pi_z^{\epsilon}\mathbf{V} = \iint K_{\epsilon}(\cdot - z_1)K_{\epsilon}(\cdot - z_2) : \xi(z_1)\xi(z_2) : dz_1dz_2 + C_{\epsilon}^1,$$
$$C_{\epsilon}^1 = \int K_{\epsilon}(z)^2dz = \mathcal{O}(\epsilon^{-1}).$$

よって $\hat{\Pi}_z^{\epsilon}\mathbf{V} = \Pi_z^{\epsilon}\mathbf{V} - C_{\epsilon}^1$ と定義すれば収束する.

- 同様に

$$\Pi_z^{\epsilon}\Psi = \iiint K_{\epsilon}(\cdot - z_1)K_{\epsilon}(\cdot - z_2)K_{\epsilon}(\cdot - z_3) : \xi(z_1)\xi(z_2)\xi(z_3) : dz_1dz_2dz_3$$
$$+ 3C_{\epsilon}^1 \int K_{\epsilon}(\cdot - z)\xi(z)dz$$

より $\hat{\Pi}^{\epsilon}\Psi = \Pi^{\epsilon}\Psi - 3C_{\epsilon}^1\Pi^{\epsilon}\mathbf{I}$ と定義すれば良い.

$\Pi^\epsilon\tau$ の繰り込み（2）

- $\Pi^\epsilon_z \overset{\mathsf{V}}{\mathsf{V}} = \Pi^\epsilon_z \mathsf{V}(K * \Pi^\epsilon_z \mathsf{V}) = (\hat{\Pi}^\epsilon_z \mathsf{V} + C^1_\epsilon)(K * \hat{\Pi}^\epsilon_z \mathsf{V})$, ここで

  $$\hat{\Pi}^\epsilon_z \mathsf{V}(K * \hat{\Pi}^\epsilon_z \mathsf{V}) = (\mathcal{H}_4) + (\mathcal{H}_2) + C^2_\epsilon,$$
  $$C^2_\epsilon = 2 \int\!\!\int\!\!\int K(\cdot - z) K_\epsilon(z - z_1) K_\epsilon(z - z_2) K_\epsilon(\cdot - z_1) K_\epsilon(\cdot - z_2) dz dz_1 dz_2$$
  $$= \mathcal{O}(|\log \epsilon|)$$

  より $\hat{\Pi}^\epsilon_z \overset{\mathsf{V}}{\mathsf{V}} = \Pi^\epsilon_z \overset{\mathsf{V}}{\mathsf{V}} - C^1_\epsilon \Pi^\epsilon_z \mathsf{Y} - C^2_\epsilon$ とすれば良い.
- 同様に $\overset{\mathsf{V}}{\mathsf{Y}}, \overset{\mathsf{VV}}{\mathsf{V}}, \ldots$ に対してもやっていく.
- 一つ一つの τ に対して $\hat{\Pi}^\epsilon_z \tau$ を定義してきたが, 対応する admissible なモデル $\hat{Z}^\epsilon$ はあるのか？

構造群 G

展開 $\Gamma : T \to T$ の係数としてあり得る形を T^+ で表す.

- $T^+ = \langle X^k \prod_{i=1}^N \mathcal{J}_{l_i}\tau_i \,;\, \tau_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{W}, |\tau_{l_i}| + 2 - |l_i|_s > 0 \rangle$: $\mathbb{R}$-代数.
- $\Delta \in \mathcal{L}(T, T \otimes T^+)$ を次で定義

$$\Delta \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \Delta X_i = X_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X_i, \quad \Delta \Xi = \Xi \otimes \mathbf{1},$$
$$\Delta \tau\tau' = \Delta\tau\Delta\tau', \quad \Delta \mathcal{I}\tau = (\mathcal{I} \otimes \mathrm{id})\Delta\tau + \sum_{l,m} \frac{X^l}{l!} \otimes \frac{X^k}{k!} \mathcal{J}_{l+m}\tau.$$

$G = \{\Gamma_g = (\mathrm{id} \otimes g)\Delta \,;\,$準同型 $g : T^+ \to \mathbb{R}\}$ は群の構造を持つ.

- $\Delta^+ \in \mathrm{Hom}(T^+, T^+ \otimes T^+)$: 余積, $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta^+)\Delta$.
- 準同型 $f, g : T^+ \to \mathbb{R}$ に対し $f \circ g = (f \otimes g)\Delta^+$ と定義すると

$$\Gamma_{f \circ g} = \Gamma_f \Gamma_g.$$

- G は群構造を持つ. ($\Leftarrow (T^+, \Delta^+)$ は Hopf 代数.)

モデルの変換

$Z = (\Pi, \Gamma)$: admissible

$\leftrightarrow (\mathbf{\Pi}, f)$: $\Pi_z = (\mathbf{\Pi} \otimes f_z)\Delta$

- $f_z(X^k) = (-z)^k, \ f_z(\mathcal{J}_k\tau) = (\partial^k K * \Pi_z\tau)(z),$
- $(\mathbf{\Pi}X^k)(z) = z^k, \ \mathbf{\Pi}\mathcal{I}\tau = K * \mathbf{\Pi}\tau.$

命題

$M \in \mathcal{L}(T)$ を $M\mathcal{I} = \mathcal{I}M$ と $M(X^k\tau) = X^k M\tau$ を満たす変換とする．このとき

$$\mathbf{\Pi}^M = \mathbf{\Pi}M$$

を満たす *admissible* なモデル $(\mathbf{\Pi}^M, f^M)$ が（解析的な条件を除いて）定義できる．対応する $Z^M = (\Pi^M, \Gamma^M)$ はある写像 $\Delta^M \in \mathcal{L}(T, T \otimes T^+)$, $\hat{\Delta}^M \in \mathcal{L}(T^+, T^+ \otimes T^+)$ によって

$$\Pi_z^M = (\Pi_z \otimes f_z)\Delta^M, \quad \gamma_{zz'}^M = (\gamma_{zz'} \otimes f_z)\hat{\Delta}^M$$

と表される．（$\Gamma_{zz'} = \Gamma_{\gamma_{zz'}}$ と $\gamma_{zz'}$ を同一視.）

繰り込み群 $\mathfrak{R}$

$\mathfrak{R}$ を $M\mathcal{I} = \mathcal{I}M$ と $M(X^k\tau) = X^k M\tau$ を満たす変換 $M \in \mathcal{L}(T)$ で

$$\Delta^M \tau = \tau \otimes \mathbf{1} + \bigoplus_{\beta > |\tau|} T_\beta \otimes T^+$$

を満たすものの全体とする.（後ろの項は $\Pi^M \tau$ のレギュラリティに影響しない.）

命題

- $M \in \mathfrak{R}$ のとき Z^M は *admissible* なモデルである.
- $\mathfrak{R}$ は群をなす.

Φ^4_3 に対応する $\mathfrak{R}$ の元

$\Pi^\epsilon \tau$ の繰り込みを思い出すと, $M = M(C_1, C_2)$ を

$$
\begin{aligned}
M\mathsf{V} &= \mathsf{V} - C_1 \mathbf{1},\\
M\Psi &= \Psi - 3C_1 \mathsf{I},\\
M\mathsf{Y}\!\mathsf{V} &= \mathsf{Y}(\mathsf{V} - C_1 \mathbf{1}) - C_2 \mathbf{1},\\
M\Psi\!\mathsf{I} &= (\Psi - 3C_1 /)\mathsf{I},\\
M\Psi\!\mathsf{V} &= (\Psi - 3C_1 /)(\mathsf{V} - C_1 \mathbf{1}) - 3C_2 \mathsf{I} \dots
\end{aligned}
$$

と定義するのが良い．このとき $M(C_1, C_2) \in \mathfrak{R}$ である．

- Z^ϵ : 連続なノイズ ξ_ϵ の自然な持ち上げ.

定理

適当に $C^1_\epsilon, C^2_\epsilon$ を選ぶと, $\hat{Z}^\epsilon = (Z^\epsilon)^{M(C^1_\epsilon, C^2_\epsilon)}$ は近似の仕方によらないある *admissible* モデル値確率変数 $\hat{Z}$ に確率収束する.

方程式の繰り込み

$\hat{Z}^\epsilon$ に対応する方程式は?

命題

$\hat{\mathcal{R}}^\epsilon u(z) = (\hat{\Pi}^\epsilon_z u(z))(z) = (\Pi^\epsilon_z M^\epsilon u(z))(z) = \mathcal{R}^\epsilon M^\epsilon u(z).$

- 方程式 (Φ^4_3)

$$u = \mathcal{I}(\Xi - u^3) + \langle X^k \rangle$$

の解は

$$u = \mathsf{I} + u_{\mathbf{1}}\mathbf{1} - \Psi - 3u_{\mathbf{1}}\Upsilon + u_{X_i}X_i + \cdots .$$

特に $\mathcal{R}^\epsilon u = K * \xi_\epsilon + u_{\mathbf{1}}$.

- $M^\epsilon u = u$, 特に $\hat{\mathcal{R}}^\epsilon u = \mathcal{R}^\epsilon u$.

方程式の繰り込み

- $u^3 = \Psi + 3u_{\mathbf{1}}\vee - 3\Psi' + 3u_{\mathbf{1}}^2 \mathrm{I} - 6u_{\mathbf{1}}\Psi'' - 9u_{\mathbf{1}}\Psi''' + 3u_{X_i}X_i\vee + u_{\mathbf{1}}^3\mathbf{1} + \cdots$
- $M^\epsilon u^3 = u^3 - 3C_\epsilon^1(\mathrm{I} + u_{\mathbf{1}}\mathbf{1}) + 9C_\epsilon^2(\mathrm{I} + u_{\mathbf{1}}\mathbf{1}) + \cdots$. よって

$$\hat{\mathcal{R}}^\epsilon u^3 = (\mathcal{R}^\epsilon u)^3 - (3C_\epsilon^1 - 9C_\epsilon^2)\mathcal{R}^\epsilon u.$$

（$\mathcal{R}^\epsilon$ は積と可換.）

- u が (Φ_3^4) を満たすならば

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{R}}^\epsilon u &= G * \{\mathbf{1}_{t>0}(\xi_\epsilon - \hat{\mathcal{R}}^\epsilon u^3)\} + Gu_0 \\ &= G * \{\mathbf{1}_{t>0}(\xi_\epsilon - (\hat{\mathcal{R}}^\epsilon u)^3 + (3C_\epsilon^1 - 9C_\epsilon^2)\hat{\mathcal{R}}^\epsilon u)\} + Gu_0.\end{aligned}$$

定理

適当に $C_\epsilon^1, C_\epsilon^2$ を選ぶと, 方程式

$$\partial_t u_\epsilon = \Delta u_\epsilon - u_\epsilon^3 + (3C_\epsilon^1 - 9C_\epsilon^2)u_\epsilon + \xi_\epsilon, \quad u_\epsilon(0,\cdot) = u_0$$

の解は近似の仕方によらないある超関数値確率変数 u に確率収束する.