

Hairer 理論による Φ^4 モデルへのアプローチの概説

星野壮登 (東京大学)

Hairer 理論 (正則性構造理論) の考え方を 3 次元トーラス上の Φ^4 モデル

$$\partial_t \varphi = \Delta \varphi - \varphi^3 + m\varphi + \xi, \quad \varphi(0, \cdot) = \varphi_0$$

を題材として概説する。出発点となるのは Gubinelli-Imkeller-Perkowski (GIP) 理論と同様、Picard の逐次近似である。 $\varphi^{(0)} = \varphi_0$ から始め、列 $\{\varphi^{(n)}\}$ を

$$\partial_t \varphi^{(n+1)} = \Delta \varphi^{(n+1)} - (\varphi^{(n)})^3 + m\varphi^{(n)} + \xi, \quad \varphi^{(n+1)}(0, \cdot) = \varphi_0$$

によって定める。最終的には次のような形が現れることが分かる。

$$\varphi = K * \xi - K * (K * \xi)^3 + 3K * \{(K * \xi)^2 K * (K * \xi)^3\} + \dots \quad (1)$$

ここで K は熱核、 $*$ は (t, x) に関する畳み込みを表す。簡単のため次のような記号を導入する。

$$\mathbf{I} = K * \xi, \quad \mathbf{V} = (K * \xi)^2, \quad \mathbf{\Psi} = (K * \xi)^3, \quad \mathbf{\Psi} = K * (K * \xi)^3, \dots$$

GIP 理論では (1) の各項のレギュラリティに注目し、 φ を適当なレギュラリティを持つ超関数の和として定義した。一方 Hairer 理論では分解 (1) を抽象化した代数構造を用意し、解のレギュラリティという概念をその構造の上で捉え直す。

Hairer 理論の考え方を Taylor 展開をヒントにして説明する。時空の変数を $z = (t, x)$ と表し、スケール変換 $(t, x) \mapsto (\lambda^2 t, \lambda x)$ に適合するノルム $|z| = |t|^{1/2} + |x|$ を定義する。関数 $f = f(z)$ がクラス $\mathcal{C}^\gamma$ ($\gamma > 0$) に属するとは、適当な関数の族 $\{f_k (= \frac{1}{k!} f^{(k)})\}_{|k| < \gamma}$ が存在して z_0 の周りで

$$f(z) = \sum_{|k| < \gamma} f_k(z_0)(z - z_0)^k + O(|z - z_0|^\gamma)$$

と展開されることが定義される。これを抽象化して

$$\hat{f}(z) = \sum_{|k| < \gamma} f_k(z) X^k$$

という多項式を定義する。 X^k は任意の点の周りでのレギュラリティを表す変数で、 $\Pi_z X^k = (\cdot - z)^k$ と対応させることで

$$|(\Pi_{z_0} \hat{f}(z_0))(z) - f(z)| \lesssim |z - z_0|^\gamma$$

という評価が成り立つ。また $\langle X^k \rangle$ 上の変換 $\Gamma_{zz_0} X^k = (X + (z - z_0))^k$ によって異なる 2 点の間での係数 f_k の値を次のように比較できる。

$$|(\Gamma_{zz_0} \hat{f}(z_0))_k - f_k(z)| \lesssim |z - z_0|^{\gamma - |k|}.$$

逆にこのような比較評価があれば、 $\hat{f}$ から元の関数 f を復元することができる。ここまで現れた要素を次のように一般化する。

定義 1. 1. 実数の集合 A を 0 を含み下から有界で局所有限なものとする。 $T = \oplus_{\alpha \in A} T_\alpha$ を有限次元ノルム空間 T_α の直和、 G を T 上の有界作用素の群で任意の $\Gamma \in G$ と $\tau \in T_\alpha$ に対し $\Gamma\tau \in \tau + \oplus_{\beta < \alpha} T_\beta$ が成り立つものとする。この (A, T, G) を正則性構造という。

2. $\Pi = \{\Pi_z : T \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)\}_{z \in \mathbb{R}^4}$ と $\Gamma = \{\Gamma_{zz'} \in G\}_{z, z' \in \mathbb{R}^4}$ を写像の族で、任意の $z, z', z'' \in \mathbb{R}^4$ に対し $\Pi_z \Gamma_{zz'} = \Pi_{z'}$ と $\Gamma_{zz'} \Gamma_{z'z''} = \Gamma_{zz''}$ を満たし、任意の $\tau \in T_\alpha$ 、テスト関数 $\rho, \delta \in (0, 1]$ に対し

$$|(\Pi_z \tau)(\rho_z^\delta)| \lesssim \|\tau\|_\alpha \delta^\alpha, \quad \|\Gamma_{zz'} \tau\|_\beta \lesssim \|\tau\|_\alpha |z - z'|^{\alpha - \beta}$$

を満たすものとする。(ここで ρ_z^δ は z 中心のスケール変換 $\rho_z^\delta(z') = \delta^{-5} \rho(\delta^{-2}(t' - t), \delta^{-1}(x' - x))$ を表す。) この (Π, Γ) をモデルという。

3. 関数 $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow T$ で $\|f(z) - \Gamma_{zz'} f(z')\|_\beta \lesssim |z - z'|^{\gamma - \beta}$ を満たすものをモデル関数といい、その全体を $\mathcal{D}^\gamma$ と表す。

定理 1. $\gamma > 0$ とする。モデル関数 $f \in \mathcal{D}^\gamma$ に対し、超関数 $\mathcal{R}f$ で

$$|(\mathcal{R}f - \Pi_z f(z))(\rho_z^\delta)| \lesssim \delta^\gamma$$

を満たすものが一意的に存在する。写像 $\mathcal{R} : \mathcal{D}^\gamma \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ は線形かつ連続である。この $\mathcal{R}$ を復元作用素という。

(1) を表すために、次のような線形空間を導入する。

$$T = \langle \Xi, \Psi, \mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}, X_i \mathbb{V}, 1, \dots \rangle.$$

すなわち $\langle X^k \rangle$ を含み、 ξ の抽象化 “ Ξ ”、 K との畳み込み ($\mathcal{I} : \Psi \mapsto \Psi$ など) そして積 ($1 \times 1 \mapsto \mathbb{V}$ など) を許す。小さい $\kappa > 0$ を固定して各変数の次数を

$$|\Xi| = -\frac{5}{2} - \kappa, \quad |\mathbb{I}| = -\frac{1}{2} - \kappa, \quad |\mathbb{V}| = -\frac{3}{2} - 3\kappa, \quad |\Psi| = \frac{1}{2} - 3\kappa$$

などと定義する。つまり K との畳み込みで次数は 2 上がり、二つの変数の積の次数はそれぞれの次数の和であるとする。モデル (Π, Γ) には K との畳み込みとの可換性

$$(\Pi_{z_0} \mathcal{I} \tau)(z) = (K * \Pi_{z_0} \tau)(z) - \sum_{|k| < |\tau| + 2} \frac{(z - z_0)^k}{k!} (K * \Pi_{z_0} \tau)^{(k)}(z_0) \quad (2)$$

を仮定するが、積 $\Pi_{z\tau\tau'}$ の定義についてはある程度 of 自由を与えることにする。(GIP 理論で考えたような「繰り込みされた積」を後で代入する。) 以上の準備の下でモデル関数としての解

$$\Phi = \mathbf{1} + \varphi_1 \mathbf{1} - \Psi - 3\varphi_1 \Psi + \varphi_{X_i} X_i + \cdots$$

を唯一つ見つけることができる。

定理 2. 1. (2) を仮定したモデル (Π, Γ) に対し、モデル関数としての解 Φ が一意的に存在する。写像 $(\varphi_0, (\Pi, \Gamma)) \mapsto \Phi$ は連続である。

2. $\epsilon \downarrow 0$ で ξ を近似する滑らかな関数 ξ^ϵ を考える。このときモデル $(\Pi^\epsilon, \Gamma^\epsilon)$ を適切に定義すると、対応する解の復元 $\varphi^\epsilon = \mathcal{R}\Phi^\epsilon$ はある定数 $C^\epsilon = O(\epsilon^{-1})$ に対して方程式

$$\partial_t \varphi^\epsilon = \Delta \varphi^\epsilon - (\varphi^\epsilon)^3 + C^\epsilon \varphi^\epsilon + \xi, \quad \varphi^\epsilon(0, \cdot) = \varphi_0$$

を満たす。また $(\Pi^\epsilon, \Gamma^\epsilon)$ は近似の仕方によらないモデル (Π, Γ) に収束し、従って φ^ϵ はある普遍的な極限 $\varphi = \mathcal{R}\Phi$ を持つ。