１１月１０日

非因果的Wiener汎関数の Ogawa 積分可能性

星野浄生・数見哲也

イントロ

- $(B_t)_{t\in[0,1]}$: $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, \mathcal{F}, P)$ 上の１次元 Brown 運動.
- $f : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{B}_{[0,1]} \times \mathcal{F}$-可測なときランダム関数という.
- ランダム関数 f が $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$ に適合するとき因果的という.
- f が因果的で $\int_0^1 f(t)^2\,dt < \infty$ a.s. を満たすとき Itô 積分 $\int_0^1 f(t)\,dB_t$ が定義される.

記号

$u, v \in L^2[0,1]$ に対して

$$\langle u, v\rangle := \int_0^1 u(t)v(t)\,dt,\ \| u \|_2 := \langle u, v\rangle^{1/2},$$
$$\langle u, \dot{B}\rangle := \int_0^1 u(t)\,dB_t.$$

（Hilbert 空間 E の内積は $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, ノルムは $\| \cdot \|_E$. ）

$$\mathcal{F}_t^B := \sigma(B_s, 0 \le s \le t), \mathcal{F}^B := \mathcal{F}_1^B.$$

$$L_B^2(\Omega) := L^2(\Omega, \mathcal{F}^B, P),$$
$$L_B^2([0,1]^i \times \Omega) := L^2([0,1]^i \times \Omega, \mathcal{B}_{[0,1]^i} \otimes \mathcal{F}^B, \lambda_i \otimes P).$$

Ogawa 積分(φ-可積分性)

$f(t)$ ： $\int_0^1 f(t)^2\,dt < \infty$ a.s.,
$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $L^2[0,1]$ のCONS.

この時, f の$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関する Ogawa 積分を

$$\int_0^1 f(t)\,d_\varphi B_t := \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n\rangle\langle \varphi_n, \dot{B}\rangle$$

で定義する. ただし右辺は確率収束を仮定し、この場合 f はφ-可積分という.

Ogawa 積分(u-可積分性)

$f(t)$ ： $\int_0^1 f(t)^2\,dt < \infty$ a.s.

f が任意のCONS $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して

f は φ-可積分.
$\int_0^1 f(t)\,d_\varphi B_t$ は $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ によらない.

を満たすとき, f は u-可積分 という.
この場合の Ogawa 積分を $\int_0^1 f(t)\,d_{\mathrm{u}} B_t$ と記す.

例

例1 $f(t)$ **が有界変動** a.s. $\Rightarrow f(t)$ **は** u-**可積分で** $\int_0^1 f(t)\,d_{\mathrm{u}}B_t = f(1)B(1) - \int_0^1 B(t)\,df(t)$.

例2 $1/2 < p \leq 1$ **と**CONS $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **に対して**

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{sgn}\langle\varphi_{\mathrm{n}}, \dot{\mathrm{B}}\rangle\varphi_{\mathrm{n}}(\mathrm{t})$$

は φ-**可積分でない**.

例3 $f(t) = B(1-t)$**は** u-**可積分でない**.

定理1(Ogawa)

$L^2[0,1]$ の CONS $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ に関して次が成立：

「任意の仮似マルチンゲール $f(t)$ が φ-可積分.

$\Leftrightarrow$ $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ が正則.」

注） $f(t)$ が仮似マルチンゲール.

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f(t) = \int_0^t g(s)\,dB_s + a(t)$ と表される.

- $g(t)$ は因果的かつ $\int_0^1 g(t)^2\,dt < \infty$ a.s.
- $a(t)$ は有界変動 a.s.

定理2(Ogawa)

仮似マルチンゲール $f(t) = \int_0^t g(s)\,dB_s + a(t)$ で, $g(t)$ が更に仮似マルチンゲール $g(t) = \int_0^t h(s)\,dB_s + b(t)$ であるなら f は u-可積分．

Ogawa 積分の具体的表示

定理1 **あるいは定理**2 **の**

$$f(t) = \int_0^t g(s)\, dB_s + a(t)$$

について, **その** Ogawa **積分は以下のように**
なる：

$$\int_0^1 f(t)\, d_* B_t = \int_0^1 f(t)\, dB_t + \frac{1}{2} \int_0^1 g(t)\, dt.$$

本講演の主題

$f(t) = \int_0^t g(s)\, dB_s$：Skorokhod 積分.

$v(t)$：有界変動関数.

の場合について，fv は

- いつ Ogawa 積分可能か？
- Ogawa 積分の具体的表示は？

多重Wiener-Itô積分

$k \in L^2[0,1]^n$ に対して

$I_n(k) := \int_{[0,1]^n} k(s_1, \dots, s_n)\, dB(s_1) \cdots dB(s_n)$
は以下を満たす：

(1) $I_n(k) = I_n(\widehat{k})$, $\widehat{k}$ は k の対称化.
(2) $E(I_n(k)) = 0$.
(3) $E|I_n(k)|^2 = n! \,\|\, \widehat{k} \,\|^2_{L^2[0,1]^n} \leq n! \,\|\, k \,\|^2_{L^2[0,1]^n}$.

また, $k = c \in \mathbb{R}$ に対して $I_0(k) := c$.

Wiener-Itô 定理

$$L^2_{\mathrm{sym}}[0,1]^n = \{k \in L^2[0,1]^n \mid k = \widehat{k}\},$$
$$C_n = I_n(L^2_{\mathrm{sym}}[0,1]^n),\ n \in \mathbb{N},$$
$$C_0 = I_0(\mathbb{R})$$

とすると

$$L^2_B(\Omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n .$$

任意の $f \in L^2_B(\Omega)$ の次の展開が成立：

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k^f_n) \ .$$

Sobolev空間

$i \in \mathbb{N}_0$ と $r \in [0, \infty)$ に対して, Sobolev 空間 $\mathcal{L}_i^{r,2}$ を次で定義する：

$$\mathcal{L}_i^{r,2} = \left\{ f \in L_B^2([0,1]^i \times \Omega) \;\middle|\; \| f \|_{\mathcal{L}_i^{r,2}}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^r \, n! \, \| k_n^f \|_{L^2[0,1]^{i+n}}^2 < \infty \right\}.$$

微分作用素 D

$f \in \mathcal{L}_1^{r,2}, r \geq 1$ が

$$f(s,\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n\Big(\, k_n^f(s;\cdot)\,\Big)$$

のとき

$$D_t f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}\Big(\, k_n^f(s;\cdot,t)\,\Big) \in \mathcal{L}_2^{r-1,2}.$$

Skorokhod積分

$f \in \mathcal{L}_i^{r,2}, i \in \mathbb{N}, r \geq 1$ が

$$f(t_1, \ldots, t_i) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n\big(\, k_n^f(t_1, \ldots, t_i\,;\, \dot{s}_1, \ldots, \dot{s}_n)\,\big)$$

のとき

$$\int_0^1 f(t_1, \ldots, t_i)\, dB_{t_j} \;:=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}\big(\, k_n^f(t_1, \ldots, \overset{j\text{-th}}{\overset{\vee}{\dot{s}_{n+1}}}, \ldots, t_i\,;\, \dot{s}_1, \ldots, \dot{s}_n)\,\big) \in \mathcal{L}_{i-1}^{r-1,2},$$

$$\int_0^s f(t_1, \ldots, t_i)\, dB_{t_j} \;:=$$

$$\int_0^1 f(t_1, \ldots, t_i) \mathbf{1}_{[0,s]}(t_j)\, dB_{t_j} \in \mathcal{L}_i^{r-1,2}.$$

正則な CONS

$L^2[0,1]$ の CONS $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ が正則.

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sup_{M\in\mathbb{N}} \|(\varphi,\widetilde{\varphi})_M\|_2 < \infty.$

ここで $(\varphi,\widetilde{\varphi})_M(t) = \sum_{m=1}^{M} \varphi_m(t) \int_0^t \varphi_m(s)\,ds.$

以下の $L^2[0,1]$ の CONS は正則.

- 三角関数系
- Haar 関数系
- Legendre 関数系

Key lemma 1

$u(t)$ は有界変動.
$L^2[0,1]$ の CONS $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は正則.

このとき以下が成り立つ:

(1) $\sup_{M\in\mathbb{N}} ||(\varphi, \widehat{u\varphi}\,)_M||_2 < \infty$.

(2) $w\text{-}\lim_{M\to\infty}(\varphi, \widehat{u\varphi})_M = \frac{1}{2}u$ in $L^2[0,1]$.

ここで

$$(\varphi, \widehat{u\varphi})_M(t) = \sum_{m=1}^{M} \varphi_m(t) \int_t^1 u(s)\varphi_m(s)\, ds.$$

Main theorem 1

以下を仮定する：

(1) $v(t)$ **は有界変動関数**.
(2) $f(t) = \int_0^t g(s)\, dB_s$, $g \in \mathcal{L}_1^{2,2}$.
(3) $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ **は正則**.

このとき, fv **は** φ -**可積分で**, **その** Ogawa **積分は次で与えられる**:

$$\int_0^1 (fv)(t)\, d_\varphi B_t = \int_0^1 (fv)(t)\, dB_t$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 (gv)(t)\, dt + \int_0^1 \Big(\int_0^t D_t g(s)\, dB_s \Big) v(t)\, dt.$$

Main theorem 2

以下を仮定する：

(1) $v(t)$ **は有界変動関数**.
(2) $f(t) = \int_0^t g(s)\,dB_s$, $g \in \mathcal{L}_1^{2,2}$.
(3) $g(t) = \int_0^t h(s)\,dB_s$, $h \in \mathcal{L}_1^{1,2}$.

このとき, fv **は** u -**可積分で**, **その** Ogawa **積分は**Main theorem **1と同様に与えられる**.

Main theorem 1の証明の方針

$$X = \int_0^1 (fv)(t)\, dB_t,$$

$$Y = \int_0^1 \Big(\int_0^t D_t g(s)\, dB_s \Big) v(t)\, dt,$$

$$Z = \tfrac{1}{2} \int_0^1 (gv)(t)\, dt,$$

$$S_M = \sum_{m=1}^{M} \langle fv, \varphi_m \rangle \langle \varphi_m, \dot{B} \rangle$$

とおく. S_M **が** $M \to \infty$ **の時** $X + Y + Z$ **に** L^2-**収束することを示す**.

Main theorem 1の証明の手順

Step 1: f と g を展開.

Step 2: X, Y, Z を展開.

Step 3: S_M を展開.

Step 4: S_M の $X + Y + Z$ への収束.

Step 1: f と g の展開

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n\big(\, k_n^g(s;\cdot)\,\big) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 g(s) 1_{[0,t]}(s) dB_s \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} I_n\big(\, k_{n-1}^g(\dot{s}_1; \dot{s}_2, ..., \dot{s}_n) 1_{\dot{s}_1 \le t}\,\big). \end{aligned}$$

Step 2: X の展開

$$f(t)v(t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} I_n\Big(k^g_{n-1}(\dot{s}_1; \dot{s}_2, ..., \dot{s}_n)\, 1_{\dot{s}_1 \le t}\, v(t) \Big)$$

より

$$X = \int_0^1 f(t)v(t)\, dB_t$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} I_{n+1}\Big(k^g_{n-1}(\dot{s}_1; \dot{s}_2, ..., \dot{s}_n)\, 1_{\dot{s}_1 \le \dot{s}_{n+1}}\, v(\dot{s}_{n+1}) \Big).$$

Step 2: Z の展開

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n\big(\, k_n^g(t;\cdot)\,\big)$$ より

$$Z = \frac{1}{2}\int_0^1 g(t)v(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} I_n\Big(\,\frac{1}{2}\int_0^1 k_n^g(t;\dot{s}_1,\ldots,\dot{s}_n)v(t)\,dt\,\Big).$$

Step 2: Y の展開

$$D_t g(s) 1_{s\le t} = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(k_n^g(s;\cdot,t) 1_{s\le t})$$

より

$$Y = \int_0^1 \Big(\int_0^t D_t g(s)\, dB_s \Big) v(t)\, dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n I_n \Big(\int_0^1 k_n^g(\dot{s}_1; \dot{s}_2, \ldots, \dot{s}_n, t)(v 1_{[\dot{s}_1, 1]})(t)\, dt \Big).$$

Step 3: S_M の展開(1)

$$(fv)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n\Big(k^g_{n-1}(\dot{s}_1; \dot{s}_2, \ldots, \dot{s}_n)\, \mathbf{1}_{\dot{s}_1 \le t}\, v(t) \Big)$$

より

$$\langle fv, \varphi_m \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} I_n\Big(k^g_{n-1}(\dot{s}_1; \dot{s}_2, \ldots, \dot{s}_n)\, \langle \varphi_m, v\mathbf{1}_{[\dot{s}_1,1]} \rangle \Big).$$

Step 3: S_M の展開 (2)

$\langle \varphi_m, \dot{B} \rangle = I_1(\varphi_m)$ より

$$\langle fv, \varphi_m \rangle \langle \varphi_m, \dot{B} \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} I_n\Big(k^g_{n-1}(\dot{s}_1; \dot{s}_2, ..., \dot{s}_n) \langle \varphi_m, v1_{[\dot{s}_1, 1]} \rangle \Big) I_1(\varphi_m).$$

積和公式

$e \in L^2[0,1]$ と $k \in L^2[0,1]^n, n \in \mathbb{N}$ に対して次が成立：

$$I_n(k)I_1(e) = I_{n+1}(k \otimes e) + nI_{n-1}(\hat{k} \otimes_1 e),$$

ここで

$$(\hat{k} \otimes_1 e)(s_1, ..., s_{n-1})$$
$$= \int_0^1 \hat{k}(s_1, ..., s_{n-1}, s_n)e(s_n)\, ds_n.$$

Step 3: S_M の展開(3)

$$\langle fv, \varphi_m\rangle\langle\varphi_m, \dot{B}\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} I_{n+1}\big(\,k^g_{n-1}(\dot{s}_1; \dot{s}_2, ..., \dot{s}_n)\langle\varphi_m, v\mathbf{1}_{[\dot{s}_1,1]}\rangle\varphi_m(\dot{s}_{n+1})\,\big)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)I_{n-1}\Big(\int_0^1 k^g_{n-1}(\dot{s}_1; \dot{s}_2, ..., \dot{s}_{n-1}, t)$$

$$\langle\varphi_m, v\mathbf{1}_{[\dot{s}_1,1]}\rangle\varphi_m(t)\,dt\,\Big)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} I_{n-1}\Big(\int_0^1 k^g_{n-1}(t; \dot{s}_1, ..., , \dot{s}_{n-1})\varphi_m(t)\widehat{v\varphi_m}(t)\,dt\,\Big).$$

Step 3: S_M の展開(4)

$S_M = \sum_{m=1}^{M} \langle fv, \varphi_m \rangle \langle \varphi_m, \dot{B} \rangle = X_M + Y_M + Z_M$ となる.

$$X_M = \sum_{n=1}^{\infty} I_{n+1}\Big(k^g_{n-1}(\dot{s}_1; \dot{s}_2, \dots, \dot{s}_n) \sum_{m=1}^{M} \langle \varphi_m, v\mathbf{1}_{[\dot{s}_1,1]} \rangle \varphi_m(\dot{s}_{n+1}) \Big),$$

$$Y_M = \sum_{n=1}^{\infty} nI_n\Big(\int_0^1 k^g_n(\dot{s}_1; \dot{s}_2, \dots, \dot{s}_n, t) \sum_{m=1}^{M} \langle \varphi_m, v\mathbf{1}_{[\dot{s}_1,1]} \rangle \varphi_m(t)\, dt \Big),$$

$$Z_M = \sum_{n=0}^{\infty} I_n\Big(\int_0^1 k^g_n(t; \dot{s}_1, \dots, , \dot{s}_n)(\varphi, \widehat{v\varphi})_M(t)\, dt \Big).$$

Step 4: $\lim_{M\to\infty} S_M = X + Z + Y$

Claim 1: $\lim_{M\to\infty} X_M = X$,

Claim 2: $\lim_{M\to\infty} Y_M = Y$,

Claim 3: $\lim_{M\to\infty} Z_M = Z$

を示す.

Claim 1, Claim 2 **は比較的容易**.

Claim 3 (1)

$$
\begin{aligned}
&Z - Z_M \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} I_n \Big(\int_0^1 k_n^g(t; \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_n) \\
&\qquad\qquad \Big(\frac{1}{2} v(t) - (\varphi, \widehat{v\varphi})_M(t) \Big)\, dt \Big)
\end{aligned}
$$

より

Claim 3 (2)

$$E\left|Z - Z_M\right|^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} n!\, c_M(n),$$

ここで

$$c_M(n) = \int_{[0,1]^n} \left| \int_0^1 k_n^g(t; s_1, \ldots, s_n) \left(\frac{1}{2} v(t) - (\varphi, \widehat{v\varphi})_M(t) \right) dt \right|^2 ds_1 \ldots ds_n.$$

Claim 3 (3)

Key lemma 1 (2) **より**

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^1 k_n^g(t;s_1,...,s_n)$$

$$\left(\frac{1}{2}v(t)-(\varphi,\widehat{v\varphi})_M(t)\right)dt=0$$

a.a. $(s_1,...,s_n)\in[0,1]^n$.

Claim 3 (4)

Key lemma 1 (1) より

$C := \sup_M \| (\varphi, \widehat{v\varphi})_M \|_2^2 < \infty$ なので

$$\Big| \int_0^1 k_n^g(t; s_1, ..., s_n) \Big(\frac{1}{2} v(t) - (\varphi, \widehat{v\varphi})_M (t) \Big) \, dt \Big|^2$$

$$\leq \Big(\frac{1}{2} \| v \|_2^2 + 2C \Big) \int_0^1 |k_n^g(t; s_1, ..., s_n)|^2 \, dt$$

$$\in L^1[0,1]^n$$

となり $\lim_{M \to \infty} c_M(n) = 0.$

Claim 3 (5)

$$n!\,c_M(n) \le \left(\frac{1}{2} \| v \|_2^2 + 2C \right) n! \| k_n^g \|_{L^2[0,1]^{n+1}}^2$$

であり, $g \in \mathcal{L}_1^{0,2}$ より

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \| k_n^g \|_{L^2[0,1]^{n+1}}^2 < \infty.$$

したがって $\lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n!\,c_M(n) = 0$ となり

$\lim_{M\to\infty} E \left| Z - Z_M \right|^2 = 0$ が示される.

Main theorem 2 の証明

Main theorem **1** の証明と同様

Step **1**, Step **2**, Step **3**, Step **4**

の **4** 段階に分け, Step **4** では

Claim **1**, Claim **2**, Claim **3**

を主張する.

Claim **3** の証明で Key lemma 2 を用いる.

Key lemma 2

次を仮定する：

$u(t)$ **は有界変動関数**

$(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ **は** $L^2[0,1]$ **の任意の** CONS

このとき, $\Lambda_M^{\varphi}(s,t) = \sum_{m=1}^{M} \varphi_m(t) \int_s^t \varphi_m(u)\,du$

とおくと次が成り立つ：

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{s\in[0,1]} \Big| \int_s^1 u(t) \Big(\frac{1}{2} - \Lambda_M^{\varphi}(s,t) \Big)\, dt \Big| = 0.$$