

非因果的な Wiener 汎関数の Ogawa 積分可能性

星野 浄生 (大阪府立大学)*1

数見 哲也 (大阪府立大学)*2

1. 序

通常確率解析では Brown 運動に関する確率積分を定義するために被積分関数は因果的, すなわち filtration に適合することを仮定する. 一方因果的であるという条件は応用上制約となることがあり, 非因果的関数に対しても確率積分の概念を拡張する試みが行われてきた. このようなものの代表的なものとしては Skorokhod 積分 ([3]) と Ogawa 積分 ([1],[2]) があり, それぞれ因果的関数の Itô 積分と Stratonovich 対称積分の非因果的関数に対する拡張とみなせる. 本講演では, Wiener chaos の枠組みで, 非因果的関数が Skorokhod 積分で表される場合に Ogawa 積分可能であるための十分条件と, この条件が満たされるときの Ogawa 積分の具体的表示を与える.

2. 設定

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $B : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を Brown 運動 とし, Brown 運動を可測にする σ -field を $\mathcal{F}_B = \sigma(B_t | t \in [0, 1])$ とする. 以下, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_B, P)$ 上で考える. 核関数 $k \in L^2[0, 1]^n$ に対して $I_n(k)$ をその n 次の重複 Wiener-Itô 積分とする. また $k \in L^2[0, 1]^0 = \mathbb{R}$ のとき $I_0(k) = k$ とする. $L^2_{\text{sym}}[0, 1]^n = \{f \in L^2[0, 1]^n \mid f : \text{symmetric}\}$, $L^2_{\text{sym}}[0, 1]^0 = \mathbb{R}$ とするとき, $L^2(\Omega)$ は次のように直交直和分解される:

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I_n(L^2_{\text{sym}}[0, 1]^n).$$

したがって $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ とすると, 任意の $f \in L^2([0, 1]^i \times \Omega)$ は核関数 $k_n^f(t; \cdot) \in L^2_{\text{sym}}[0, 1]^n$ により次のように分解表示される:

$$f(t, \cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k_n^f(t; \cdot)) \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad \text{a.a. } t \in [0, 1]^i.$$

定義 1 (Sobolev 空間) $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ と $r \geq 0$ に対して Sobolev 空間 $\mathcal{L}_i^{r,2}$ を以下で定義する:

$$\mathcal{L}_i^{r,2} = \{f \in L^2([0, 1]^i \times \Omega) \mid |f|_{i,r,2}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^r n! |k_n^f(\cdot; \cdot)|_{L^2[0,1]^{i+n}}^2 < \infty\}.$$

注) $\mathcal{L}_i^{r,2}$ はノルム $|\cdot|_{i,r,2}$ に関して Hilbert 空間であり, $\mathcal{L}_i^{0,2} = L^2([0, 1]^i \times \Omega)$. また r に関して単調減少である: $r_1 < r_2 \Rightarrow \mathcal{L}_i^{r_1,2} \supset \mathcal{L}_i^{r_2,2}$.

定義 2 (Skorokhod 積分) $f \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ とする. f の核関数による分解表示を $f(t, \cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k_n^f(t; \cdot))$ とすると, $\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(k_n^f(\cdot; \cdot))$ は $L^2(\Omega)$ で収束する. この和を f の Skorokhod 積分といい, $\int_0^1 f(t) dB_t$ と表す. また $s \in [0, 1]$ に対して $\int_0^s f(t) dB_t$ を $\int_0^1 1_{[0,s]}(t) f(t) dB_t$ で定義する.

*1 e-mail: su301032@edu.osakafu-u.ac.jp

*2 e-mail: kazumi@las.osakafu-u.ac.jp

定義 3 (微分作用素) $g \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ とする. g の核関数による分解表示を $g(s, \cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k_n^g(s; \cdot))$ とすると, $\sum_{n=0}^{\infty} n I_{n-1}(k_n^g(s; \cdot, t))(\omega)$ は $L^2([0, 1]^2 \times \Omega)$ で収束する. この和を $D_t g(s)$ と表す.

定義 4 (Ogawa 積分) 可測関数 $f : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は $\int_0^1 f(t)^2 dt < \infty$ a.s. を満たすとする.

- (φ -可積分性) $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ を $L^2[0, 1]$ の CONS とする.
 $\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f(t) \varphi_m(t) dt \int_0^1 \varphi_m(t) dB_t$ が確率収束するとき, f は φ -可積分であるという. そしてこの和を f の φ に関する Ogawa 積分といい, $\int_0^1 f(t) d_{\varphi} B_t$ と表す.
- (u -可積分性) $L^2[0, 1]$ の任意の CONS $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ に関して f が φ -可積分であり, $\int_0^1 f(t) d_{\varphi} B_t$ が $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ に依存しないとき f は u -可積分であるという. そして $\int_0^1 f(t) d_{\varphi} B_t$ を f の Ogawa 積分といい, $\int_0^1 f(t) d_u B_t$ と表す.

3. 主定理

以下では可測関数 $f : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は $g \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ により $f(t, \omega) = (\int_0^t g dB)(\omega)$ と表され, $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は有界変動とする. このとき fv の Ogawa 積分可能性に関して以下の定理が成り立つ.

定理 1 $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ を $L^2[0, 1]$ の CONS とし, $\tilde{\varphi}_m(t) = \int_0^t \varphi_m(s) ds$ とおく. g と $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ が

$$(1) g \in \mathcal{L}_1^{2,2} \quad \text{かつ} \quad (2) (\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ は正則 i.e. } \sup_{M \in \mathbb{N}} \left| \sum_{m=1}^M \varphi_m \tilde{\varphi}_m \right|_{L^2[0,1]} < \infty$$

を満たすとする. このとき fv は φ -可積分であり, $\int_0^1 f(t)v(t) d_{\varphi} B_t$ は

$$\int_0^1 f(t)v(t) dB_t + \frac{1}{2} \int_0^1 g(t)v(t) dt + \int_0^1 \left(\int_0^t D_t g(s) dB_s \right) v(t) dt \quad \dots\dots (*)$$

と一致する.

定理 2 g が

$$(1) g \in \mathcal{L}_1^{2,2} \quad \text{かつ} \quad (2) g(t, \omega) = \left(\int_0^t h dB \right)(\omega), \quad h \in \mathcal{L}_1^{1,2}$$

を満たすとする. このとき fv は u -可積分であり, $\int_0^1 f(t)v(t) d_u B_t$ は定理 1 の (*) と一致する.

注) (2) で $h \in \mathcal{L}_1^{3,2}$ であれば (1) は満たされる.

参考文献

- [1] S. Ogawa, Quelques propriétés de l'intégrale stochastique du type noncausal. Japan J. Appl. Math. **1**, 405-416 (1984)
- [2] S. Ogawa, The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals. Japan J. Appl. Math. **2**, 229-240 (1985)
- [3] A.V. Skorokhod, On a generalization of a stochastic integral. Theory Probab. Appl. **20**, 219-233 (1975)