

非因果的な Wiener 汎関数の SFC による同定

数見 哲也 (大阪府立大学 理学系研究科)
星野 浄生 (大阪府立大学 理学系研究科)

2016 年 11 月 10 日

確率 Fourier 係数 (SFC) と問題 A

$(B_t)_{t \in [0,1]}$: 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の Brown 運動

$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $L^2[0,1]$ の完全正規直交系 (CONS) (任意の e_n は有界)

$a : [0,1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

a の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に関する確率 Fourier 係数 (SFC) を次で定める.

$$(a\dot{B}, e_n) := \int_0^1 e_n(t) a(t, \omega) dB_t$$

注) SFC-S : $\int \cdot dB_t$ が Skorokhod 積分

SFC-O : $\int \cdot dB_t$ が Ogawa 積分

問題 A : a は $((a\dot{B}, e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ で同定できるか?

確率 Fourier 係数 (SFC) と問題 B

$$a, b : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

確率微分 $dX_t = a(t, \omega) dB_t + b(t, \omega) dt$ の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に関する SFC を次で定める.

$$\begin{aligned} (\dot{X}, e_n) &:= \int_0^1 e_n(t) dX_t \\ &= \int_0^1 e_n(t) a(t, \omega) dB_t + \int_0^1 e_n(t) b(t, \omega) dt \end{aligned}$$

問題 B : a, b は $((\dot{X}, e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ で同定できるか?

先行研究と本研究

先行研究

- SFC-S の場合

- [1] 問題 A に対し, a が因果的のとき, 同定可能
- [2] 問題 A に対し, a が非因果的のとき, 適当な条件の下, 同定可能
- [3] 問題 B に対し, a, b が非因果的のとき, 適当な条件の下, 同定可能

- SFC-O の場合

- [4] 問題 A に対し, a が非因果的のとき, 適当な条件の下, 同定可能

本研究

- SFC-S の場合

問題 B に対し, a, b が非因果的のとき, 無条件に同定可能

- SFC-O の場合

問題 B に対し, a, b が非因果的のとき, 適当な条件の下, 同定可能

SFC-S での同定：問題 A-先行研究

定理 01 ([2] Ogawa,Uemura(2014))

$L^2[0,1]$ の CONS として、三角関数系 $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ をとる.
(但し, $T_n(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}nt}$)

$a \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ とする.

$\Rightarrow$ a は SFC-S の系 $((a\dot{B}, T_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ で表現できる.

SFC-S での同定：問題 A-先行研究

定理 02 ([2] Ogawa,Uemura(2014))

$a \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ は以下を満たす.

$$(1) \sup_{t \in [0,1]} E(a(t)^2) < \infty$$

$$(2) \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 E(|D_s a(t)|^2) ds < \infty$$

$\Rightarrow$ a は SFC-S の系 $((a\dot{B}, e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ で表現できる.

$$\begin{aligned} \text{概略: } ((a\dot{B}, e_n))_{n \in \mathbb{N}} &\implies ((a\dot{B}, T_n))_{n \in \mathbb{Z}} \implies a \\ &\quad (a\dot{B}, T_n) = \sum_m c_{n,m} (a\dot{B}, e_m) \qquad \text{定理 01} \end{aligned}$$

SFC-S での同定：問題 A-主結果

定理 1 (Noncausal Wiener 汎関数の SFC-S による同定)

$a \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ は以下を満たす:

~~(1) $\sup_{t \in [0,1]} E(a(t)^2) < \infty$~~

~~(2) $\sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 E(|D_s a(t)|^2) ds < \infty$~~

$\Rightarrow a$ は SFC-S の系 $((a\dot{B}, e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ で表現できる.

証明の手順:

Step1: a を (Wiener-Itô) 展開し, SFC-S の定義式 の両辺を展開

$$(a\dot{B}, e_n) = \int_0^1 e_n(t) a(t) dB_t$$

Step2: $(a\dot{B}, e_n)$ の核関数と a の核関数の関係式群 $\dots$ ① を導く

方針 $\Leftrightarrow$ $(a\dot{B}, e_n)$ の核関数 $\implies a$ の核関数

Step3: t^{p-1} ($p \in \mathbb{N}$) の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ による Fourier 展開を用いて
① から ' e_n を含まない a の核についての連立一次方程式' を導く

Step4: その方程式を解く

Step1: a を (Wiener-Itô) 展開し, SFC-S の定義式 の両辺を展開

$$(a\dot{B}, e_n) = \int_0^1 e_n(t) a(t) dB_t$$

$$a(t) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(k_m^a(t; \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m))$$

$$\begin{aligned} \text{右辺: } \int_0^1 e_n(t) a(t) dB_t &= \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} I_m(e_n(t) k_m^a(t; \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m)) dB_t \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}(e_n(\dot{t}) k_m^a(\dot{t}; \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m)) \end{aligned}$$

$$\text{左辺: } (a\dot{B}, e_n) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(c_{n,m}(\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m)) \quad (c_{n,m} = k_m^{(a\dot{B}, e_n)})$$

Step2: $(a\dot{B}, e_n)$ の核関数と a の核関数の関係式群 ... ① を導く

$$\sum_{m=0}^{\infty} I_m(c_{n,m}(\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m)) = \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}(e_n(\dot{t})k_m^a(\dot{t}; \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m))$$

展開の一意性より, 各 $n, m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{aligned} c_{n,m}(s_1, \dots, s_m) &= (e_n(s_1)k_{m-1}^a(s_1; s_2, \dots, s_m))^{\wedge} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m e_n(s_j)k_{m-1}^a(s_j; s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_m) \\ &\quad \text{a.a. } (s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^m \\ &\quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

Step3: t^{p-1} ($p \in \mathbb{N}$) の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ による Fourier 展開を用いて
① から ' e_n を含まない a の核についての連立一次方程式' を導く

各 $p \in \{1, \dots, m\}$ に対し, t^{p-1} の Fourier 展開より,

$$t^{p-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle t^{p-1}, e_n \rangle_{L^2[0,1]} e_n(t) \quad \text{in } L^2[0,1]$$

であるから, 必要ならば $(N)_{N \in \mathbb{N}}$ の部分列をとると a.a. $t \in [0, 1]$ で上式が成り立つ. ここで,

$$\textcircled{1} ; \quad c_{n,m}(s_1, \dots, s_m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m e_n(s_j) k_{m-1}^a(s_j; s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_m)$$

$$\text{a.a. } (s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^m$$

の両辺に $\langle t^{p-1}, e_n \rangle_{L^2[0,1]}$ をかけて, $n \in \mathbb{N}$ について $N \in \mathbb{N}$ までの和をとると,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \langle \dot{t}^{p-1}, e_n \rangle_{L^2[0,1]} c_{n,m}(s_1, \dots, s_m) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m k_{m-1}^a(s_j; s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_m) \sum_{n=1}^N \langle \dot{t}^{p-1}, e_n \rangle_{L^2[0,1]} e_n(s_j) \\
&\quad a.a. \quad (s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^m
\end{aligned}$$

左辺の概収束極限を $c_{m,p}^*(s_1, \dots, s_m)$ とおくと、次の方程式を得る.

$$\begin{aligned}
c_{m,p}^*(s_1, \dots, s_m) &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s_j^{p-1} k_{m-1}^a(s_j; s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_m) \\
&\quad a.a. \quad (s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^m
\end{aligned}$$

$$, p \in \{1, \dots, m\}$$

Step4: その方程式を解く

$$V(s_1, \dots, s_m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1^{m-1} & s_2^{m-1} & \dots & s_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

とおくと, 方程式は

$$V(s_1, \dots, s_m) \begin{pmatrix} k_{m-1}^a(s_1; s_2, \dots, s_m) \\ k_{m-1}^a(s_2; s_1, s_3, \dots, s_m) \\ \vdots \\ k_{m-1}^a(s_m; s_1, \dots, s_{m-1}) \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} c_{m,1}^*(s_1, \dots, s_m) \\ c_{m,2}^*(s_1, \dots, s_m) \\ \vdots \\ c_{m,m}^*(s_1, \dots, s_m) \end{pmatrix}$$

$\det V(s_1, \dots, s_m) = \prod_{i < j} (s_j - s_i) \neq 0$ a.a. $(s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^m$ より,

$V(s_1, \dots, s_m)$ は a.a. $(s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^m$ で逆行列が存在し,

$$\begin{pmatrix} k_{m-1}^a(s_1; s_2, \dots, s_m) \\ k_{m-1}^a(s_2; s_1, s_3, \dots, s_m) \\ \vdots \\ k_{m-1}^a(s_m; s_1, \dots, s_{m-1}) \end{pmatrix} = mV(s_1, \dots, s_m)^{-1} \begin{pmatrix} c_{m,1}^*(s_1, \dots, s_m) \\ c_{m,2}^*(s_1, \dots, s_m) \\ \vdots \\ c_{m,m}^*(s_1, \dots, s_m) \end{pmatrix}$$

$$a.a. \ (s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^m$$

従って, $(k_{m-1}^a(s_1; s_2, \dots, s_m))_{m \in \mathbb{N}}$ が表現でき, a が表現できる.

SFC-S での同定：問題 B-先行研究

定理 03 ([3] Ogawa,Uemura(2014))

$L^2[0,1]$ の CONS として、三角関数系 $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ をとる.
(但し, $T_n(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}nt}$)

$a \in \mathcal{L}_1^{2,2}, b \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ とする.

$\Rightarrow$

a, b は $dX_t = a(t) dB_t + b(t) dt$ の SFC-S の系 $((\dot{X}, T_n))_n$ で表現できる.

概略: $((\dot{X}, T_n))_n \xRightarrow{\text{Bohr product}} (\langle a, T_n \rangle)_n \xRightarrow{\quad} a \xRightarrow{\quad} (\langle b, T_n \rangle)_n \xRightarrow{\quad} b$
 $(\dot{X}, T_n) = (a\dot{B}, T_n) + \langle b, T_n \rangle$

SFC-S での同定：問題 B-主結果

定理 2 (Noncausal Wiener 汎関数の確率微分の SFC-S による同定)

$L^2[0,1]$ の CONS として、~~三角関数系 $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$~~ ^{$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$} をとる。
~~(但し、 $T_n(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}nt}$)~~

$a \in \mathcal{L}_1^{\frac{1}{2},2}$, $b \in \mathcal{L}_1^{\frac{0}{2},2}$ とする。

$\Rightarrow$

a, b は $dX_t = a(t) dB_t + b(t) dt$ の SFC-S の系 $((\dot{X}, \overline{T_n})_n)$ ^{e_n} で表現できる。

証明の手順:

Step1: a, b を展開し, SFC-S の定義式 の両辺を展開

$$(\dot{X}, e_n) = (a \dot{B}, e_n) + \int_0^1 e_n(t) b(t) dt$$

Step2: $(\dot{X}, e_n), a, b$ それぞれの核関数の間の関係式群 ... ② を導く

方針 ⇨ a を消去して,

$$(\dot{X}, e_n) \text{ の核関数 } \implies b \text{ の核関数 } \implies b \implies a$$

Step3: $1_{[0,t]}$ の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ による Fourier 展開を用いて ② から ' e_n を含まない b の核の積分と a の核についての積分方程式' を導く

Step4: その方程式の両辺を偏微分し, b の核を求める

Step5: 定理 1 から a を求める

Step1: a, b を展開し, SFC-S の定義式 の両辺を展開

$$(\dot{X}, e_n) = (a \dot{B}, e_n) + \int_0^1 e_n(t) b(t) dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e_n(t) b(t) dt &= \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} I_m(e_n(t) k_m^b(t; \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m)) dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} I_m(\langle e_n(\dot{t}), k_m^b(\dot{t}; \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m) \rangle_{L^2([0,1], dt)}) \end{aligned}$$

また, 定理 1 の証明と同様に $a, (\dot{X}, e_n)$ が展開されるので,

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}(e_n(\dot{t}) k_m^a(\dot{t}; \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m)) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} I_m(\langle e_n(\dot{t}), k_m^b(\dot{t}; \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m) \rangle_{L^2([0,1], dt)}) \\ (\text{左辺}) &= \sum_{m=0}^{\infty} I_m(c_{n,m}(\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m)) \quad (c_{n,m} = k_m^{(\dot{X}, e_n)}) \end{aligned}$$

Step2: $(\dot{X}, e_n), a, b$ それぞれの核関数の間の関係式群 ... ② を導く

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} I_m(c_{n,m}(\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m)) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}(e_n(t)k_m^a(t; \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m)) \\
 &+ \sum_{m=0}^{\infty} I_m(\langle e_n(t), k_m^b(t; \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m) \rangle_{L^2([0,1], dt)})
 \end{aligned}$$

展開の一意性より, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{aligned}
 c_{n,m}(s_1, \dots, s_m) &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m e_n(s_j) k_{m-1}^a(s_j; s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_m) \\
 &+ \langle e_n, k_m^b(\cdot; s_1, \dots, s_m) \rangle_{L^2[0,1]} \\
 &\quad \text{a.a. } (s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^m \quad \dots \text{ ②}
 \end{aligned}$$

Step3: $1_{[0,t]}$ の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ による Fourier 展開を用いて ② から ' e_n を含まない b の核の積分と a の核についての積分方程式' を導く

$\tilde{e}_n(t) = \langle e_n, 1_{[0,t]} \rangle_{L^2[0,1]}$ とすると, $1_{[0,t]}$ の Fourier 展開より,

$$1_{s \leq t} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes \tilde{e}_n(s, t) \quad \text{in } L^2[0,1]^2$$

ここで, ② の両辺に $\tilde{e}_n(t)$ をかけて, $n \in \mathbb{N}$ について $N \in \mathbb{N}$ までの和をとると, a.a. $(t, s_1, \dots, s_m) \in [0,1]^{m+1}$ に対し,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \tilde{e}_n(t) c_{n,m}(s_1, \dots, s_m) &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m k_{m-1}^a(s_j; s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_m) \sum_{n=1}^N e_n(s_j) \tilde{e}_n(t) \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \langle e_n, 1_{[0,t]} \rangle_{L^2[0,1]} \langle e_n, k_m^b(\cdot; s_1, \dots, s_m) \rangle_{L^2[0,1]} \end{aligned}$$

定理 1 の証明と同様に必要ならば部分列をとり, 左辺の概収束極限を $C_m(t; s_1, \dots, s_m)$ とすると, 次の積分方程式を得る.

$$\begin{aligned} C_m(t; s_1, \dots, s_m) &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m k_{m-1}^a(s_j; s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_m) \mathbf{1}_{s_j \leq t} \\ &\quad + \int_0^t k_m^b(\tau; s_1, \dots, s_m) d\tau \\ &\quad \text{a.a. } (t, s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^{m+1} \end{aligned}$$

Step4: その方程式の両辺を偏微分し, b の核を求める

ある $C_m(t; s_1, \dots, s_m)$ の version $\tilde{C}_m(t; s_1, \dots, s_m)$ が存在し,
a.a. $(s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^m$ に対して, $\tilde{C}_m(t; s_1, \dots, s_m)$ は t の関数として,
a.a. $t \in [0, 1]$ で微分可能であり,

$$\frac{\partial \tilde{C}_m}{\partial t}(t, s_1, \dots, s_m) = k_m^b(t, s_1, \dots, s_m) \quad \text{a.a. } t \in [0, 1]$$

従って,

$$k_m^b(t; s_1, \dots, s_m) = \frac{\partial \tilde{C}_m}{\partial t}(t; s_1, \dots, s_m) \quad \text{a.a. } (t, s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^{m+1}$$

Step5: 定理 1 から a を求める

よって b が得られ, $(\dot{X}, e_n)$ の定義より, $((a\dot{B}, e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ が表現できる
が, 定理 1 よりこれから a が表現できる.

SFC-O での同定：問題 A-先行研究

定理 04 (Ogawa,Uemura(2015))

$L^2[0,1]$ の CONS として、三角関数系 $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ をとる.

$a : [0,1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は以下を満たす.

(1) ($a(t)$ は非負値かつ t で微分可能) a.s.

(2) $a'(t) \in L^2([0,1] \times \Omega)$

(3) $\int_0^1 a(t) dt \in L^2(\Omega)$

$\Rightarrow a$ は SFC-O_u の系 $((a\dot{B}, T_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ で表現できる.

Ogawa 積分可能性：主結果

定理

$v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; 有界変動

$$a(t) = \int_0^t g(s) dB_s \quad (g \in \mathcal{L}_1^{2,2})$$

av の Ogawa 積分可能性に関して以下が成り立つ.

I) (1) $L^2[0, 1]$ の CONS φ は正則 $\Rightarrow av$ は φ -可積分

(2) $\exists h \in \mathcal{L}_1^{1,2} \quad g(t) = \int_0^t h(s) dB_s \Rightarrow av$ は u -可積分

II) (1) または (2) の仮定が満たされるとき, その (φ -)Ogawa 積分は

$$\int_0^1 a(t)v(t) dB_t + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}g(t) + \int_0^t D_t g(s) dB_s \right) v(t) dt$$

SFC-O での同定 : 問題 B-主結果

定理 3 (Noncausal Wiener 汎関数の確率微分の SFC-O による同定)

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$: 有界変動関数からなる CONS

$$a(t) = \int_0^t g(s) dB_s \quad (g \in \mathcal{L}_1^{2,2}), \quad b \in \mathcal{L}_1^{0,2}$$

(1) $L^2[0,1]$ の CONS φ は正則

(2) $\exists h \in \mathcal{L}_1^{1,2} \quad g(t) = \int_0^t h(s) dB_s$

の何れかを満たす.

$\Rightarrow$

$$a, b \text{ は } dY_t = \begin{cases} a(t) d_\varphi B_t + b(t) dt & , (1) \text{ のとき} \\ a(t) d_u B_t + b(t) dt & , (2) \text{ のとき} \end{cases}$$

の SFC-O_{*} の系 $((\dot{Y}, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ で表現できる.

証明の概要:

Ogawa 積分可能性の主定理より, av_n は $\begin{cases} \varphi\text{-可積分で} & , (1) \text{ のとき} \\ u\text{-可積分で} & , (2) \text{ のとき} \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 a(t)v_n(t) d_*B_t \\ &= \int_0^1 a(t)v_n(t) dB_t + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}g(t) + \int_0^t D_tg(s) dB_s \right) v_n(t) dt \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} & (\dot{Y}, v_n) \\ &= \int_0^1 a(t)v_n(t) d_*B_t + \int_0^1 b(t)v_n(t) dt \\ &= \int_0^1 a(t)v_n(t) dB_t + \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{1}{2}g(t) + \int_0^t D_tg(s) dB_s + b(t) \right)}_{c(t)} v_n(t) dt \end{aligned}$$

$(\dot{Y}, v_n)$ は $X_t = a(t) dB_t + c(t) dt$ の SFC-S でもあり, 定理 2 より $(\dot{Y}, v_n)$ で a, c が表現される.

$b(t) = c(t) - \frac{1}{2}g(t) - \int_0^t D_t g(s) dB_s$ より g が表現できればよいが, g は a で表現できる.

実際, a と g の関係から, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し次が成り立つ.

$$k_n^a(t; s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n k_{n-1}^g(s_j; s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_n) 1_{s_j \leq t}$$
$$\text{a.a. } (t, s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^{n+1}$$

a.a. $(s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^n$ に対し, $s_1 < \dots < s_n$ と仮定すれば,
 任意の $k \in \{1, \dots, n\}$ に対し,

$$\begin{aligned}
 k_{n-1}^g(s_k; s_1, \dots, \hat{s}_k, \dots, s_n) &= \sum_{1 \leq j \leq k} k_{n-1}^g(s_j; s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_n) \\
 &\quad - \sum_{1 \leq j \leq k-1} k_{n-1}^g(s_j; s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_n) \\
 &= \frac{n}{s_{k+1} - s_k} \int_{s_k}^{s_{k+1}} k_n^a(\tau; s_1, \dots, s_n) d\tau \\
 &\quad - \frac{n}{s_k - s_{k-1}} \int_{s_{k-1}}^{s_k} k_n^a(\tau; s_1, \dots, s_n) d\tau
 \end{aligned}$$

一般には,

$$k_{n-1}^g(t; s_1, \dots, s_{n-1}) = \frac{n}{t_+ - t} \int_t^{t_+} k_n^a(\tau; t, s_1, \dots, s_{n-1}) d\tau \\ - \frac{n}{t - t_-} \int_{t_-}^t k_n^a(\tau; t, s_1, \dots, s_{n-1}) d\tau$$

$$, t_+ = \min\{s_j > t \mid j \in \{1, \dots, n\}\} \\ , t_- = \max\{s_j < t \mid j \in \{0, \dots, n-1\}\}$$

$$\text{a.a. } (t, s_1, \dots, s_{n-1}) \in [0, 1]^n$$

従って, g が表現できる.