

非因果的な Wiener 汎関数の SFC による同定

星野 浄生 (大阪府立大学)*¹

数見 哲也 (大阪府立大学)*²

1. 序

Random 関数が、確率 Fourier 係数 (SFC) で同定されるか、という問題が [1]~[4] で論じられてきた。[1] では、random 関数が因果的 (causal) な場合について論じられている。一方、random 関数が非因果的 (noncausal) な場合について、[2] では Skorokhod 積分型の SFC での random 関数の同定について、[3] では [2] の拡張問題として random 関数の確率微分の同定について、結果がある。また [4] では Ogawa 積分型の SFC での同定についての結果がある。本講演では、2 乗可積分 Wiener 汎関数空間において、無条件に Skorokhod 積分型の SFC で非因果的な Wiener 汎関数の確率微分の同定を行い、さらに本会講演「非因果的な Wiener 汎関数の Ogawa 積分可能性」の主定理を用いて、Ogawa 積分型の SFC での同定を導く。

2. 設定

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間、 $B : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を Brown 運動 とし、Brown 運動が生成する σ -field を $\mathcal{F}_B = \sigma(B_t | t \in [0, 1])$ とする。また、 $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $L^2[0, 1]$ の CONS で、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し e_n は有界であるとする。Skorokhod 積分、Ogawa 積分それぞれについての SFC の定義を述べる。

注) Sobolev 空間 $\mathcal{L}_i^{r,2}$ 、Skorokhod 積分 $\int_0^1 \cdot dB_t$ 、Ogawa 積分 $\int_0^1 \cdot d_\varphi B_t$ 、 $\int_0^1 \cdot d_u B_t$ の定義についてはそれぞれ、「非因果的な Wiener 汎関数の Ogawa 積分可能性」abstract の定義 1,2,4 を参照。

定義 1 (非因果的な Wiener 汎関数の確率微分の SFC-S) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_B, P)$ 上で考える。 $a \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ 、 $b \in \mathcal{L}_1^{0,2}$ とし、次の Skorokhod 積分による確率微分を考える。

$$dX_t = a(t) dB_t + b(t) dt \quad \text{すなわち,} \quad X_t = \int_0^t a(s) dB_s + \int_0^t b(s) ds \quad , t \in [0, 1].$$

ここで、 dX の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に関する n 番目の確率 Fourier 係数 (SFC-S) $\mathcal{F}_n(dX)$ を次で定義する。

$$\mathcal{F}_n(dX) = \int_0^1 e_n(t) dX_t := \int_0^1 a(t) e_n(t) dB_t + \int_0^1 b(t) e_n(t) dt.$$

特に、 $b = 0$ のとき、 $\mathcal{F}_n(a dB)$ を a の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に関する n 番目の Skorokhod 型確率 Fourier 係数 (SFC-S) ともいう。

可測関数 $a : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は $\int_0^1 a(t)^2 dt < \infty$ a.s. を満たすとし、可測関数 $b : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は $\int_0^1 |b(t)| dt < \infty$ a.s. を満たすとする。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、 ae_n は Ogawa 積分可能であるとする。ここで以下を定義する。

*¹ e-mail: su301032@edu.osakafu-u.ac.jp

*² e-mail: kazumi@las.osakafu-u.ac.jp

定義 2 (Random関数の確率微分のSFC-O) (特定のCONSに関する, 或いは universal な)Ogawa 積分 $\int_0^1 \cdot d_* B_t$ による次の確率微分を考える.

$$dY_t = a(t) d_* B_t + b(t) dt \quad \text{すなわち,} \quad Y_t = \int_0^t a(s) d_* B_s + \int_0^t b(s) ds, \quad t \in [0, 1].$$

ここで, dY の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に関する n 番目の確率 Fourier 係数 (SFC-O_{*}) $\mathcal{F}_n(dY)$ を次で定義する.

$$\mathcal{F}_n(dY) = \int_0^1 e_n(t) dY_t := \int_0^1 a(t) e_n(t) d_* B_t + \int_0^1 b(t) e_n(t) dt.$$

特に, $b = 0$ のとき, $\mathcal{F}_n(a d_* B)$ を a の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に関する n 番目の Ogawa 型確率 Fourier 係数 (SFC-O_{*}) ともいう.

3. 主定理

以下, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_B, P)$ 上で考える.

定理 1 (非因果的 Wiener 汎関数の確率微分のSFC-Sによる同定) 確率微分 dX を $a \in \mathcal{L}_1^{1,2}$, $b \in \mathcal{L}_1^{0,2}$ を用いて以下で定める.

$$dX_t = a(t) dB_t + b(t) dt.$$

このとき, a, b は dX の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に関する SFC-S の系 $(\mathcal{F}_n(dX))_{n \in \mathbb{N}}$ を用いて表現できる.

「非因果的な Wiener 汎関数の Ogawa 積分可能性」の主定理を適用することで以下の定理を得る. 以下では, 可測関数 $a : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は $g \in \mathcal{L}_1^{2,2}$ により $a(t, \omega) = (\int_0^t g dB)(\omega)$ と表されているとし, $b \in \mathcal{L}_1^{0,2}$ とし, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を有界変動関数列とする.

定理 2 (非因果的 Wiener 汎関数の確率微分のSFC-Oによる同定)

(1) $L^2[0, 1]$ の CONS $\varphi = (\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ は正則

(2) $\exists h \in \mathcal{L}_1^{1,2} \quad g(t, \omega) = (\int_0^t h dB)(\omega)$

のいずれかを満たすとする. このとき, 確率微分

$$dY = \begin{cases} a(t) d_\varphi B_t + b(t) dt & , (1) \text{ のとき} \\ a(t) d_u B_t + b(t) dt & , (2) \text{ のとき} \end{cases}$$

の $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に関する SFC-O_{*} の系 $(\mathcal{F}_n(dY))_{n \in \mathbb{N}}$ が定義され, a, b は $(\mathcal{F}_n(dY))_{n \in \mathbb{N}}$ を用いて表現できる.

参考文献

- [1] S. Ogawa, On a stochastic Fourier transformation. An International Journal of Probability and Stochastic Processes. Vol. 85. **2**, 286-294 (2013)
- [2] S. Ogawa, H. Uemura, On a stochastic Fourier coefficient: case of noncausal functions. J.Theoret. Probab. **27**, 370-382 (2014)
- [3] S. Ogawa, H. Uemura, Identification of a noncausal Itô process from the stochastic Fourier coefficients. Bull. Sci. Math. **138**, 147-163 (2014)
- [4] S. Ogawa, H. Uemura, On the identification of noncausal functions from the SFCs. 数理解析研究所講究録. **1952**, 128-134 (2015-06)