

繰り込み群と物理学の難問（ミレニアム問題）

立教大学数理物理学研究センター

伊東恵一

1 ミレニアム問題

A.Jaffe 先生が 2000 年ころにクレイ研究所からミレニアム問題という一連の問題を出したが [9], そのうち数理物理学関連の問題として

1. クオーク粒子の幽閉を含む 4 次元ゲージ場理論の構成
2. ナヴィエ・ストークス方程式の解とその性質

があげられ [6], これらはリーマン予想と並んでいる. この二つの問題は, 非常な高エネルギー（短い距離の現象）と低いエネルギー（実世界の距離）が非線形性によって相互に関連している共通性がある. 他方今話題になっている, KPZ 方程式に始まる SPDE では, 非線形方程式にすべての振動数をもつ white noise が絡まるというもので, 同じ側面をもっている [5, 10].

繰り込み群は, 無限次元の積分, しかも長い波長, 短い波長が干渉しあう非線形の場面で, 短い振動から長いほうに向かって, (あるいは逆に) 順繰りに積分する分析法で, ミレニアム問題に対する繰り込み群的アプローチとして,

1. A.Jaffe-T.Balaban による YM_4 の研究 [1] (Harvard group)
2. Ya Sinai による乱流の繰り込み群による研究 (Princeton group)

などと試みられたが成功とはいえない. 完成した今までの結果をまとめておくと

1. 3 次元 ϕ^4 モデルの解の存在 [2]
2. 4 次元 ϕ^4 モデルは正で小さい結合定数ならば解は自明（ガウス場）になることの証明 [4]
3. 非線形微分方程式の臨界指数

この講演は最初の問題への中点にあるもので, 非線形なシステムで汎関数積分を遂行する方法をより簡単な問題（だけどもむつかしい）に限定して話させていただく.

2 KPZ と繰り込み群

KPZ も white noise Ξ をもつ SPDE で

$$\begin{aligned}\partial_t h &= \partial_x^2 h + F(\partial_x h) + \Xi, \quad F(u) = a_0 + a_2 u^2 + \cdots \\ \mathbf{E}(\Xi(t, x)\Xi(t', x')) &= \delta(t - t')\delta(x - x'), \quad s, t > 0\end{aligned}$$

という形をもつ. Hairer は彼の理論でこの解が彼の“繰り込み”を経由して, Hopf-Cole 解に収束することを示した [5] (これは厳密解が発見されている). 他方 H.Spohn は h を 3 成分 $h = (h_1, h_2, h_3)$ に拡張し (Ξ も 3 成分), Kupiainen [10] が Wilson 流の繰り込み法で任意の成分数の h について解の存在を証明している. Hairer も Kupiainen も, $\varepsilon > 0$ 以下の距離を取り除く 軟化作用素 (ある

いは切断) をいれ, 極限をとるのは同じで, 場の理論の繰り込みと共通する方法である. ここでは彼の Wilson 流の解析を紹介してみる. $h \rightarrow u$, $F \rightarrow V$ として

$$\begin{aligned} u &= G * (V(\partial_x u) + \Xi) + e^{t\Delta} u_0 \\ G(x, t) &= e^{t\Delta} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp[-x^2/2t] \end{aligned}$$

と書き換え, G から $0 < t < \varepsilon^2$ 部を切り離す. $\chi(t)$ を $[0, 1]$ の (端をなめらかにした) 特性関数とし

$$\begin{aligned} u &= G_\varepsilon * (V(\partial_x u) + \Xi) + e^{t\Delta} u_0 \\ G_\varepsilon(x, t) &= e^{t\Delta}(x, 0)(1 - \chi(\varepsilon^{-2}t)) \end{aligned}$$

ここで u は複数成分で

$$V(\partial_x) = (\partial_x u, M\partial_x u)$$

2.1 Block Spin 変換 と PKZ

Block Spin 変換は上記の積分方程式を逐次にとくもので

1. スケール変換 s_ε で $t \rightarrow \varepsilon^2 t, x \rightarrow \varepsilon x$ 行い $G_\varepsilon \rightarrow G_1$ にする. $\varphi = s_\varepsilon u$
2. $G_1 = G_{L^2} + (G_1 - G_{L^2})$ とし $|x| > L$ と $1 < |x| < L$ に分離
3. $(G_1 - G_{L^2})$ 部の積分方程式を解き G_{L^2} に代入. $s \equiv s_{L^{-1}}$ でスケールダウンして, G_{L^2} を G_1 にして繰り返す

すなわち, $\varepsilon \rightarrow 1$ にしてから step 2 では

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi_1 &= G_{L^2} * (v^\varepsilon(\varphi_1 + \varphi_2) + \xi) \\ \varphi_2 &= (G_1 - G_{L^2}) * (v^\varepsilon(\varphi_1 + \varphi_2) + \xi) \end{aligned}$$

step 3 では,

$$\varphi_1 = \varphi', \varphi_2 = s\zeta$$

と書きかえて ($L^2 \rightarrow 1$)

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi' &= G_1 * (Sv^\varepsilon(\varphi' + \zeta) + \xi) \\ \zeta &= \Gamma * (Sv^\varepsilon(\varphi' + \zeta) + \xi) \end{aligned}$$

(S は $s = s_{L^{-1}}, s^{-1}$ からなる作用素である) ここで

$$\Gamma = e^{t\Delta}(\chi(t) - \chi(L^2 t))$$

は 1 と L^{-1} のスケールに生きていて, ζ はもとまり $\varphi' + \zeta = \varphi' + \zeta(\varphi')$ として, 繰り返す. この Γ は性質のいい積分核で繰り込み変換で重要な役担う. ζ は θ (Γ で平滑化された ξ) で表わされ

$$(\phi + \theta, M(\phi + \theta))$$

の発散の消去のため $E(\theta(t, x)\theta(s, y))$ という繰り込み補正項 (この場合定数項) を導出する.

3 非線形モデルの繰り込み群

4次元ゲージ模型の単純版である2次元シグマモデル, $O(N)$ スピンモデル, あるいはハイゼンベルグモデルを考える。 $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_N(x)) \in R^N$ を N 成分スピンとして

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{Z_\Lambda} \int [\dots] \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \phi, (-\Delta + m_0^2) \phi \rangle - \frac{g_0}{2N} \sum_{x \in \Lambda} (\phi^2(x) - \beta_{\text{orig}})^2 \right] \prod_{x \in \Lambda} d^N \phi(x) \quad (1)$$

が対象で, ϕ は N 次元の半径 $\sqrt{\beta_{\text{orig}}}$ の球面に値をとるスピんで, 非アーベル的対称性 $SO(N)$ をもつ。 $N > 2$ において相転移がないと信じられている。ここで $\Lambda \subset Z^2$ は方形領域, $g_0 > 0$ は結合定数, $(-\Delta)_{xy} = 4\delta_{xy} - \delta_{1,|x-y|}$ は格子ラプラシアン。なお $N = 1$ で Ising 模型 (Peiers-Onsager), $N = 2$ で XY 模型といい, 2016 年度物理学ノーベル賞の Kosterlitz-Thoules は $N = 2$ で相転移があることを予言し, Froehlich-Spencer [3] が証明した。質量 $m_0 > 0$ は任意にとれるが

$$NG_0(0) = \beta_{\text{orig}}, \quad G_0(x, y) \equiv \frac{1}{-\Delta + m_0^2}(x, y) \quad (2)$$

ととれば $\phi^2(x) - \beta_{\text{orig}}$ を Wick 積 $:\phi^2(x):$ にとれる。 $SO(N)$ 不変性を持つこのモデルの難点は

1. 境界壁の定義 (Ising 模型との著しい相違)
2. $e^{-\sum_x (\phi_x^2 - \beta)^2}$ の非摂動的積分計算

この問題を Wilson のブロックスピン変換でもとめる。 Δ_0 は大きさ $L \times L$, 中心原点の正方形として

$$(Cf)(x) = \frac{1}{L^2} \sum_{\zeta \in \Delta_0} f(Lx + \zeta) \quad (3)$$

$$\phi_n(x) = (C\phi_{n-1})(x) \quad (4)$$

つまりブロック変換作用素 C は算術平均とスケールダウンからなる。

$$\Lambda_n = L^{-n} \Lambda \cap Z^2 \quad (5)$$

ブロックスピン $\phi_n(x)$ の Green 関数は

$$G_n(x, y) = (CG_{n-1}C^+)(x, y) = \frac{1}{L^4} \sum_{\zeta \in \Delta_0, \xi \in \Delta_0} G_{n-1}(Lx + \zeta, Ly + \xi), \quad x \in \Lambda_n, y \in \Lambda_n \quad (6)$$

Wick 積

$$:\phi_n(x)\phi_n(y):_{G_n} = \phi_n(x)\phi_n(y) - NG_n(x, y) \quad (7)$$

はスピンの回転の程度 (境界壁の強さ) を表わすというのがこの仕事の発端である [7]。

$$\exp[-W_n(\phi_n)] = \int \exp[-W_{n-1}(\phi_{n-1})] \prod \delta(\phi_n(x) - (C\phi_{n-1})(x)) \prod d\phi_{n-1}(x), \quad (8)$$

$$W_0(\phi_0) = \frac{1}{2} \langle \phi_0, G_0^{-1} \phi_0 \rangle_\Lambda + \frac{g_0}{2N} \langle : \phi_0^2 :_{G_0}, : \phi_0^2 :_{G_0} \rangle \quad (9)$$

3.1 BST

$N(0, G_0)$ であるガウス変数 ϕ_0 を $N(0, G_1)$ である ϕ_1 と, $N(0, \Gamma_0)$ である ξ に分解する

$$\begin{aligned}\phi(x) &= (A_1 \phi_1)(x) + (Q \xi_0)(x), \xi(x), x \in \Lambda - L\Lambda_1 \\ (CA_1)(x, y) &= \delta_{x, y}, \quad (CQ)(x, y) = 0\end{aligned}$$

すなわち

$$\langle \phi, G_0^{-1} \phi \rangle = \langle \phi_1, G_1^{-1} \phi_1 \rangle + \langle \xi_0, \Gamma_0^{-1} \xi_0 \rangle \quad (10)$$

$$G_1^{-1} = A_1^+ G_0^{-1} A_1, \quad \Gamma_0^{-1} = Q^+ G_0^{-1} Q \quad (11)$$

一般には

$$A_n = G_{n-1} C^+ G_n^{-1} \quad (12)$$

$$Q(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y \notin L\Lambda_n \\ -1 & \text{if } x \in L\Lambda_n \text{ and } y \in \Delta_x \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

とればこの分解が成り立つ

$$\begin{aligned}\phi_n &= A_{n+1} \phi_{n+1} + Q \xi_n \\ \langle \phi_n, G_n^{-1} \phi_n \rangle &= \langle \phi_{n+1}, G_{n+1}^{-1} \phi_{n+1} \rangle + \langle \xi_n, \Gamma_n^{-1} \xi_n \rangle \\ G_{n+1}^{-1} &= A_n^+ G_n^{-1} A_n, \quad \Gamma_n^{-1} = Q^+ G_n^{-1} Q\end{aligned}$$

1. $A_n : R^{\Lambda_n} \rightarrow R^{\Lambda_{n-1}}$ は $CA_n = 1$, $A_n(x, y) \sim \exp[-c|x/L - y|]$, $c = O(1)$.

2. $Q : R^{\Lambda_n \setminus L\Lambda_{n+1}} \rightarrow R^{\Lambda_n}$ ブロック毎に対角, 零平均揺動場をつくる

[演習] この処置がガウスを二つのガウスに分解すること確かめよ. また m_0 にかかわらず, ξ の 2 点関数 $\Gamma_n(x, y)$ は指数的に減少することを示せ

3.2 関数または配位空間

BST が遂行できる関数空間 $\mathcal{H} = \{\phi\}$ はボールの上をスムーズに伝搬するスピン=津波の上を伝搬するさざ波である. すなわち $\tau_0 > 0$ をある大きい定数として

$$(1) \quad | : \phi_n^2(x) :_{G_n} | \leq \tau_0 N^{1/2} \quad (14)$$

$$(2) \quad | : \phi_n(x) \phi_n(y) :_{G_n} | \leq \tau_0 N^{1/2} \exp[(c/10)|x - y|], \quad c > 0 \quad (15)$$

$$(3) \quad |\nabla_\mu \phi_n(x)| = |\phi_n(x + e_\mu) - \phi_n(x)| \leq \tau_0 N^{1/2} \quad (16)$$

$D = X^c$ では境界壁または大きい場が現れ摂動計算から逸脱する.

$$(1) \quad D_w(\phi_n) = \text{paved set such that } \forall \square \subset D_w, \exists \square' \subset D_w \text{ and it holds that } | : \phi_n(x) \phi_n(y) :_{G_n} | \geq \tau_0 N^{1/2} \exp[\frac{c}{10}|x - y|], \exists x \in \square, \exists y \in \square' \quad (17)$$

$$(2) \quad D_0(\phi_n) = \text{minimal paved set such that } | : \phi_n^2(x) :_{G_n} | \leq \tau_0 N^{1/2} \exp[\frac{c}{10}|x - y|], \forall x \in D_0(\phi), \forall y \in D_0(\phi)^c \quad (18)$$

この領域 D はそのほかの場所から「隔離」されるが, 高エネルギーをもち「実現確率は小さい」. 残りのポリマー展開の収束性を保証することが必要.

3.3 BST の流れ, 階層近似で

階層近似模型といわれているものを考える. これは Dyson の発明. ラプラシアン部 $\exp[-(1/2)\langle\phi_n, (-\Delta)\phi_n\rangle]$ を階層近似してみよう. 格子の代わりに入れ子になった方形領域の列を想定している:

$$\begin{aligned} & \exp[-(1/2)\langle\phi_n, (-\Delta)_{hcl}\phi_n\rangle] \\ &= \exp[-(1/2)\langle\phi_{n+1}, (-\Delta)_{hcl}\phi_{n+1}\rangle - (1/2)\sum_x \xi_n(x)^2], \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

がそこでは成り立ち

$$\phi_n(2x + s) = \phi_{n+1}(x) + (-1)^s \xi_n(x), \quad s = 0, 1$$

ということになる. $g_0(\phi) = \delta(\phi^2 - N\beta)$ から始め, 2 個のスピン $\phi_\pm$ を含む大きさ $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ の箱を準備, $\phi_\pm \equiv \phi \pm \xi$ とおく. ここで $\phi = \phi_{n+1}$, $\xi = \xi_n$. よって $2\xi^2 = \phi_+^2 + \phi_-^2 - 2\phi^2$, $\phi = (\varphi, 0) \in R_+ \times R^{N-1}$. そこで $\xi = (s, u) \in R \times R^{N-1}$, $f(x) = g_n(x)e^{-x/4}$, $x = \varphi^2$ とおけば

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= e^{x/2} \int f((\phi + \xi)^2) f((\phi - \xi)^2) ds d^{N-1}u \\ &= e^{x/2} \int f((\varphi + s)^2 + u^2) f((\varphi - s)^2 + u^2) ds d^{N-1}u \\ &= \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}} \int_{\mathcal{D}} f(p) f(q) \mu(x, p, q)^{(N-3)/2} dp dq \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\mu(x, p, q) = \frac{p+q}{2} - x - \frac{(p-q)^2}{16x} \quad (19b)$$

$\mathcal{D} \subset [0, N\beta]^{\times 2}$ は $\mu(x, p, q) > 0$ の領域. g_{n+1} は二つのスピン $\phi_\pm \equiv \phi \pm \xi \in R^N$ が $\phi \in R^N$, $\phi^2 = x$ を作る確率密度とみなせる. $V_n = -\log g_n$ (実効的ポテンシャル) とけば

1. $V'_n(x)$ は a priori bounds をみたす
2. $g_n(x) \rightarrow \delta(x)$ ($n_0 < n \rightarrow \infty$).

[演習] (1), (2) を示せ [8].

大きい N では $V_n = Nv_n$, $x = \phi^2/N$ などとして steepest-descent で

$$v_{n+1}(x) = \min_u \left(\frac{1}{2}(u - \log u) + 2v_n(x + u) \right) \quad (20)$$

[演習] $v'_{n+1}(x) = 2v'_n(x + u^*) = (1/u^* - 1)/2$ となること, (u^* は minimizer). これは厳密に解け, $v'_n = 0$ の近傍で $v_n(x) \sim (x - \beta + n)^2/8$ となることを示せ.

そこで形式的に $W_n \rightarrow W_{n+1}$ は次式で定められる

$$e^{-W_{n+1}(\phi_{n+1})} = \int \exp[-W_n(A_{n+1}\phi_{n+1} + Q\xi_n)] \prod d\xi_n \quad (21)$$

ただし右辺の積分では, 大きい場/境界壁領域 $D = D_0 \cup D_w$ は小場/なめらか 領域で薄く囲み (襟領域という) 他の場合から隔離され, $\Lambda = K \cup D$, $K = D^c$ とおいて

$$g_n^D(\phi_n) \exp[-W_n^K(\phi_n)] \quad (22)$$

と表わしておく. ここで D は多くの連結領域からなるであろうし, 主要項 W_n^K は

$$W_n^K(\phi_n) = \frac{1}{2} \langle \phi_n, G_n^{-1} \phi_n \rangle_{\Lambda_n} + \frac{1}{2N} \langle : \phi_n^2 :_{G_n}, \chi_K D_n \chi_K : \phi_n^2 :_{G_n} \rangle_{\Lambda_n} + F_{n,irr} + \delta F_{n,irr} \quad (23)$$

ここで

$$\langle f, g \rangle_{\Lambda_n} = \sum_{x \in \Lambda_n} f(x)g(x)$$

K は $\phi_n(x)$ を $\phi_n(x), x \in K$ に限定したもの, $F_{n,irr}$ は main irrelevant term (繰り込み変換で減少する項) で $\delta F_{n,irr}$ は前からの irrelevant terms の集まり.

$D_n > 0$ は ワインの瓶ポテンシャルの結合定数でほぼ対角形 ($D_n(x, y) \sim g_n \delta_{x,y}$) で $D_0 = g_0 \delta_{xy}$. $F_{n,irr}$ と $\delta F_{n,irr}$ は $E^\perp$, $\mathcal{N}(C) = \{f; (Cf)(x) = 0\}$ への射影を含み微分として働く.

ワインの瓶ポテンシャルが全体を支配し ($: \varphi_n^2 :_{G_n})^k, k \geq 3$ は効かない (irrelevant). あとで以下の定理を示す

[定理] D_n は正値作用素 $D^* = O(1)$ に収束する

$D = D_0(\phi_n) \cup D_w(\phi_n)$ からの寄与は g_n^D でしめされ, $\exp[-\tau_0^2 |D(\phi_n)|]$ より小さい.

$$G_n^{-1} \sim -\Delta + m_n^2, \quad m_n^2 \sim L^{2n} m_0^2 \ll 1 \quad (24)$$

前の定理から V_n^K はその $\phi_n^2 = N\beta_n$ での曲率は n によらない.

[定理] パラメータ m_n, β_n と D_n は

$$m_n^2 \sim L^{2n} m_0^2, \quad \beta_n = \beta - O(n), \quad 0 < d_- < D_n < d_+$$

にスケーリング領域で従う, ここで $d_\pm$ は定数

3.4 BST with Domain Walls.

$$z = Q\Gamma_n^{1/2}\xi \quad (25a)$$

$$\varphi_{n+1} = A_{n+1}\phi_{n+1} \quad (25b)$$

$$\phi_n = \varphi_{n+1} + z \quad (25c)$$

とおく

$$\langle \phi_n, G_n^{-1} \phi_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, G_{n+1}^{-1} \phi_{n+1} \rangle + \langle \xi, \xi \rangle \quad (25d)$$

領域を

$$D_w(\phi_n) = D_w(\varphi_{n+1}) \cup R(\xi, \phi_{n+1}) \quad (26)$$

と分解する. ここで $R(\xi, \phi_{n+1})$ は ξ が大きい値をとる領域. ϕ_{n+1} は A_{n+1} で平滑化されており $D_w(\varphi_{n+1}) = LD_w(\phi_{n+1})$.

$$d\mu_0 = \prod \exp \left[-\frac{\xi_x^2}{2} \right] \frac{d\xi_x}{(2\pi)^{N/2}}, \quad \xi_x \in R^N \quad (27)$$

とおく. 我々のアイデアは

$$q_n(x) = 2z(x)\varphi_{n+1}(x) + :z^2(x):_{\Gamma_n} \quad (28)$$

を通し, $:\phi_n^2:_{G_n} = :\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}} + q_n(x)$ の分布を求めること [7]. ここで $x \in D(\phi_n)^c$.

$$P(p, \phi_{n+1}) = \int \exp \left[\frac{i}{\sqrt{N}} \langle \lambda, (p - q) \rangle \right] d\mu_0(\xi) \prod d\lambda_x \quad (29a)$$

$$= \int \exp \left[\frac{i}{\sqrt{N}} \langle \lambda, (p + NT_n) \rangle \right] \det^{-N/2}(1 + i\alpha T_n \lambda) \\ \times \exp \left[-\frac{2}{N} \langle \lambda, (\varphi_{n+1}\varphi_{n+1}) \circ \left(Q \frac{1}{\Gamma_n^{-1} + i\alpha Q^+ \lambda Q} Q^+ \right) \lambda \rangle \right] \prod d\lambda_x \quad (29b)$$

ここで $d\mu_0$ は $N(1, 0)$ の正規分布で

$$\alpha = 2/\sqrt{N}, \quad T_n = Q\Gamma_n Q^+$$

ゆえに $\text{Tr} \Gamma_n^{1/2} Q^+ \lambda Q \Gamma_n^{1/2} = \text{Tr} T_n \lambda$, and $\varphi_{n+1} \equiv A_{n+1} \phi_{n+1}$. ここで

$$[(\varphi\varphi) \circ A]_{xy} = \varphi(x)\varphi(y)A(x, y) \\ \langle \lambda\varphi, A(\lambda\varphi) \rangle = \langle \lambda, ((\varphi\varphi) \circ A)\lambda \rangle$$

$(A \circ B)(x, y) = A(x, y)B(x, y)$ (アダマール積). 行列式を2次まで展開する. さらに

$$\varphi_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(y) = N\mathcal{G}_{n+1}(x, y) + :\varphi_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(y):_{G_{n+1}} \quad (30)$$

$$\mathcal{G}_{n+1} \equiv A_{n+1}G_{n+1}A_{n+1}^+ \quad (31)$$

として λ のガウス積分を得る:

$$\exp[-\langle \lambda, M\lambda \rangle], \quad M = 2\mathcal{G}_{n+1} \circ T_n + T_n^{\circ 2} \quad (32)$$

$T_n = Q\Gamma_n Q^+$ は $\mathcal{G}_n$ より早く減少し、よって $(\mathcal{G}_n \circ T_n)(x, y) = \mathcal{G}_n(x, y)T_n(x, y) \sim \beta_n T_n(x, y)$.

M は非局所的な境界壁因子 $:\varphi_{n+1}\varphi_{n+1}: \circ T_n$ を含みこれは他の係数に微小変化 (繰り込み) で処理される。

定理 1 $N \geq 3$ かつ $D = D_0(\phi_{n+1}) \cup D_w(\phi_{n+1}) \cup R(p)$, $R(p)$ は $|p| > N^{1-\varepsilon}$ である領域とする。このとき

$$P(p, \phi_{n+1}) = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\{X_i\}} \prod_{i=1}^n \tilde{g}_{X_i}^D(p, \phi_{n+1}) \\ \times \exp \left[-\frac{1}{4N} \langle p, \chi_K \frac{1}{M} \chi_K p \rangle + (non-local \text{ polymers}) \right] \quad (33a)$$

ここで $D \cap X_i \neq \emptyset$, $X = \cup X_i \supset D$, $K = X^c = \Lambda \setminus X$. さらに大場/境界壁因子 $\tilde{g}_{X_i}^D$ は $\{p_x, \phi_{n+1}(x); x \in X_i\}$ のみにより以下の不等式に従う

定理 2 $D_w(\phi_n) \subset \Lambda_n$ を境界壁領域で極小連結集合であるとする. ϕ_{n+1} が与えられ $D_w(\phi_n) \cap LD(\phi_{n+1}) = \emptyset$ ならばこの配位の起こる確率 $P(D_w) = P(\phi_n | \phi_{n+1})$ は以下の不等式を満たす

$$P(D_w) \leq \exp [-\text{const.} \tau_0^2 |D_w|] \quad (34)$$

$e^{-W_{n+1}}$ を得るには $p = \tilde{A}_{n+1}p_{n+1} + Q\tilde{p}$ 、ただし $p_{n+1} = Cp$, $C\tilde{A}_{n+1} = 1$, $CQ = 0$ とおく。このとき $P(p, \phi_{n+1})$ は対角化される:

$$\exp \left[-\frac{1}{4N} \langle p_{n+1}, \frac{1}{CMC^+} p_{n+1} \rangle - \frac{1}{4N} \langle Q\tilde{p}, \frac{1}{M} Q\tilde{p} \rangle \right]$$

$C\tilde{A}_{n+1} = 1$, $CQ = 0$ で T_n は急速に減少し

$$CT_n C^+ = 0, \quad \mathcal{G}_{n+1} \circ T_n \sim \beta_{n+1} T_n, \quad (CT_n^{\circ 2} C^+)(x, y) \sim \exp[-|x - y|] \quad (35)$$

よって p のブロック毎に定数な部分 p_{n+1} が残ることを示す。また $\beta_{n+1} \gg 1$ かつ $T_n = Q\Gamma_n Q^+ > O(1)$ on $\mathcal{N}(C) = \{f : Cf = 0\}$, なので p の零平均揺動場 $\tilde{Q}\tilde{p}$ はほとんど存在しない。

ゆえに

$$\int \exp \left[-\frac{1}{2N} \langle (\cdot : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}} + p), D_n(\cdot : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}} + p) \rangle \right] P(p, \varphi_{n+1}) \prod dp \quad (36)$$

で $(Q^+ \Gamma_n Q)^{-1} = E_n^\perp G_n^{-1} E_n^\perp$, さらに $E^\perp = (Q^+)^{-1} Q^+$ は $\mathcal{N}(C)$ への射影で微分作用素でもある。

ワインボトルの曲率 D_n は収束する。というのは

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{4N} \langle p, \frac{1}{M} p \rangle + \frac{1}{2N} \langle (\cdot : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}} + p), D_n(\cdot : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}} + p) \rangle \\ &= \frac{1}{4N} \langle p, \frac{1}{D} p \rangle + \frac{1}{N} \langle \cdot : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}}, D_n p \rangle + \frac{1}{2N} \langle \cdot : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}}, D_n : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}} \rangle \\ \frac{1}{D} &= \frac{1}{M} + 2D_n \end{aligned} \quad (37a)$$

なので $p = Bp_{n+1} + Q\tilde{p}$

$$B = DC^+[CDC^+]^{-1}, \quad CQ = 0 \quad (38)$$

とおくと対角化されて

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{4N} \langle p_{n+1}, \frac{1}{CDC^+} p_{n+1} \rangle_{\Lambda_{n+1}} + \frac{1}{4N} \langle Q\tilde{p}, \frac{1}{D} Q\tilde{p} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{N} \langle \cdot : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}}, D_n(Bp_{n+1} + Q\tilde{p}) \rangle + \frac{1}{2N} \langle \cdot : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}}, D_n : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}} \rangle \end{aligned} \quad (39)$$

その *minimizer* を $p = p^* = Bp_{n+1}^* + Q\tilde{p}^* = -2DD_n : \varphi_{n+1}^2 :$

$$p_{n+1}^* = -2CDD_n : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}} \quad (40a)$$

$$\tilde{Q}\tilde{p}^* = -2(E^\perp D^{-1} E^\perp)^{-1} D_n : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}} \quad (40b)$$

よって $p = B_{n+1}(p_{n+1}^* + s) + Q(\tilde{p}^* + t)$ から

$$F(p_{n+1}, p) = F_{min}(\phi_{n+1}) + \frac{1}{4N} \langle s, \frac{1}{CDC^+} s \rangle_{\Lambda_{n+1}} + \frac{1}{4N} \langle Qt, \frac{1}{D} Qt \rangle \quad (41a)$$

$$F_{min}(\phi_{n+1}) = \frac{1}{2N} \langle (A_{n+1} \phi_{n+1})^2 :, \tilde{D}_{n+1} : (A_{n+1} \phi_{n+1})^2 : \rangle \quad (41b)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{n+1} &= D_n - 2D_n DC^+(CDC^+)^{-1} CDD_n - 2D_n E^\perp (E^\perp D^{-1} E^\perp)^{-1} E^\perp D_n \\ &= 2D_n D \frac{1}{M} DD_n + \frac{1}{M} DD_n D \frac{1}{M} \end{aligned}$$

帰納法を続けるため

$$\varphi_{n+1} = A_{n+1}\phi_{n+1} = L^2C^+\phi_{n+1} + (A_{n+1} - L^2C^+)\phi_{n+1}$$

として, ブロック毎に定数な $L^2C^+\phi_{n+1}$ が主要項をつくる. のこり $A_{n+1} - L^2C^+ = (1-E)G_nC^+G_{n+1}^{-1}$ 数値的にも小さく格子ラプラシアン G_{n+1}^{-1} が含まれ $A_{n+2} = G_{n+1}C^+G_{n+2}^{-1}$ と $T_{n+1} = G_{n+1}(1 - C^+G_{n+2}^{-1}CG_{n+1})$ を相殺する. かくして揺動場の補正は小さく

定理 3 (41b) は以下の漸化式に従う

$$F_{min} = \frac{1}{2N} \langle : \phi_{n+1}^2 : , D_{n+1} : \phi_{n+1}^2 : \rangle + F_{irr} \quad (42a)$$

$$D_{n+1} = L^4[CD_nC^+ - 2L^4CD_nC^+(CDC^+)CD_nC^+] \quad (42b)$$

ただし F_{irr} は φ_{n+1} の微分を含む *irrelevant* 項

ここで $\mathcal{G}_{n+1} \circ T_n \sim \beta_{n+1}Q\Gamma_nQ^+$ を用いた. D_{n+1} は $2CD_nC^+$ と $CM^{-1}C^+$ の調和平均で

$$D_{n+1} \leq L^4(CD_nC^+) \frac{1}{CM^{-1}C^+ + 2CD_nC^+} (CM^{-1}C^+) \leq \frac{L^4}{2} CM^{-1}C^+ \quad (43)$$

なので $\{D_n\}$ は $n > 1$ に一様に有界でその $D^* \sim (L^4/2)CM^{-1}C^+$ への収束が示せる.

$$\frac{L^4}{2} CM^{-1}C^+ \sim \frac{1}{2} \frac{1}{CMC^+} \sim \frac{1}{2} id \quad (44)$$

定理 4 もし $M = M_n$ が n によらなければ D_n は正值有界作用素 $D^* \sim (1/2)(CMC^+)^{-1}$ に収束する.

3.5 繰り返し

p_{n+1} と $\tilde{Q}\tilde{p}$ の *minimizer* (40a) と (40b) の周りの積分は s と t のガウス積分になり (40a) と (40b) から, $| : \phi_{n+1}^2 : | < \text{const.} \tau_0 N^{1/2}$ なので $|s| < \tau_0 N^{1/2}$ かつ $|t| < \tau_0 N^{1/2}$ ととれ p_{n+1} と $\tilde{Q}\tilde{p}$ のシフトと s と $\tilde{s}$ での積分は q_n , $|q(\xi)| < \tau_0 N^{1/2}$ の許容変動の中にあり, s と t の積分は小さい *irrelevant* 項を与える.

重要な点は $q = : \phi_n^2 :_{G_n} - : \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}}$ が n に一様にほぼガウス積分に従う (*central limit theorem*) ことでこれから前述のステップを繰り返すことを可能にする. これは単純には以下の積分である:

$$\begin{aligned} & \int \exp \left[-\frac{g_n}{2N} \sum_{x \in \Lambda_n} (: (A_{n+1}\phi_{n+1})^2(x) :_{G_{n+1}} + p_x)^2 - \frac{1}{4NL^2} \sum_{x \in \Lambda_n} p_x^2 \right] \prod dp_x \\ &= \exp \left[-\frac{g_{n+1}}{2N} \sum_{x \in \Lambda_{n+1}} (: \phi_{n+1}^2(x) :_{G_{n+1}})^2 \right] \end{aligned}$$

ここで $(A_{n+1}\phi_{n+1})(x) = \phi_{n+1}([x/L])$, $[x/L] \in Z^2$ は $(x_1/L, x_2/L)$ に最近の格子点. つまり g_{n+1} は $2g_n$ と L^{-2} の調和平均:

$$g_{n+1} = \frac{g_n}{L^{-2} + 2g_n}$$

よって $1/g_{n+1} - 1/g^* = L^{-2}(1/g_n - 1/g^*)$, $g^* = (1 - 1/L^2)/2$. よって $g_n \rightarrow g^*$ は n について指数的に成立. この収束は安定で $(: \phi_n^2 :_{G_n})^k$, $k > 3$ などがあっても成り立つ. よってスケーリン

グ領域では g_n は n によらず $\beta_0 \ll 1$ によらず $\beta_n \searrow N^\varepsilon$, どのような繰返し式が g_n^D について得る.

この議論は $N^{1/2}/\beta_n > O(1)$ では実は評価上機能しない. つまりこの議論は $\beta_n > N^{1/2}$ (スケーリング領域) に限定され, $\beta_n \searrow 0$ には別の $N \gg 3$ は行列式の展開と $N^{-1} : \phi_n(x)\phi_n(y) :$ を無視するためにつかわれたが $N\beta_n \gg | : \phi_n(x)\phi_n(y) : |$ であればいいようである.

4 そして

$(\phi(x)^2 - N\beta)^2$ の形の相互作用は格子ゲージでも典型的に表れ、ミレニアム問題にも応用できるであろう. ナヴィエ・ストークス方程式では適当な初期条件ではそれが発展して乱流になることが (非物理的な関数空間であるが) 示されている.

参考文献

- [1] T.Balaban, *A low temperature expansion for classical N-vector model I*, *Commun.Math.Phys.*, **167** 103 (1995); *Variational problems for classical N-vector model*, *Commun.Math.Phys.*, **175**, 607 (1996).
- [2] J.Dimock, *The Renormalization Group According Balaban, I*, *arXiv 1108/1335*; *II*, *arXiv:1212.5562*
- [3] J.Fröhlich and T.Spencer, *The Kosterlitz-Thouless transitions in Two-Dimensional Abelian Spin Systems and the Coulomb Gas*, *Commun.Math.Phys.*, **81**, 527 (1981)
- [4] K.Gawedzki and A.Kupiainen, *Massless lattice ϕ_4^4 theory: Rigorous control of a renormalizable asymptotically free model*, *Commun.Math.Phys.* **99**, 197 (1985), and references cited therein.
- [5] M.Hairer et al., *A class of growth models rescaling to KPZ*, *arXiv:1512.0784*
- [6] 伊東恵一, 繰り込み群の物理と数理, *SGC ライブラリ 81* (2011), サイエンス社
- [7] K.R.Ito, *Renormalization Group Flow of 2D $O(N)$ Spin Model with large N*, *Absence of Phase Transitions*, *Paper in Preparation*
- [8] K.R.Ito, K.R.Ito, *Origin of Asymptotic Freedom in Non-Abelian Field Theories*, *Phys.Rev.Letters*, **58** (1987) 439 ; *Renormalization Group Flow of 2D Hierarchical Heisenberg Model of Dyson-Wilson Type*, *Commun. Math.Phys.* **137**(1991) 45
- [9] A.Jaffe and E.Witten, *Quantum Yang-Mills Theory*, in *Millennium Problems*, *Clay Mathematical Institute*.
- [10] A.Kupiainen, *Renormalization fo Genelarized KPZ equation*, *arXiv:1604.0872*