Integrated version of Varadhan’s asymptotics for lower order perturbations of strong local Dirichlet forms

日野正訓（京都大学）

（松浦浩平氏（東北大学）との共同研究）

研究集会「確率解析とその周辺」

九州大学, 2016 **年** 11 **月** 11 **日**

1. 導入

$\mathbb{R}^n$ 上で,

$$\frac{1}{2}\Delta \Leftrightarrow T_t = e^{t\Delta/2}$$

$$\Leftrightarrow p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)$$

(熱核密度関数)

$$\boxed{\lim_{t\to 0} 2t \log p_t(x,y) = -|x-y|^2}$$

Varadhan 型評価

$$\lim_{t\to 0} 2t\log p_t(x,y) = -d(x,y)^2$$

Varadhan (1967) $\cdots$ Norris (1997)

M: n 次元 Lipschitz 多様体

$\Delta/2 \rightsquigarrow$ 2 階微分作用素 $\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$

係数は可測，一様楕円型，一様有界

$$\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2}\int_M \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i f(x)\partial_j g(x)\,dx$$

$d(x,y)$: Dirichlet 形式に付随する内在的距離

(intrinsic distance)

注意. Rough Gaussian estimates

$$\frac{C_1}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{C_2 d(x,y)^2}{t}\right) \leq p(t,x,y) \leq \frac{C_3}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{C_4 d(x,y)^2}{t}\right)$$

から従うのは

$$-C_2 d(x,y)^2 \leq \varliminf_{t\to 0} 2t \log p(t,x,y) \leq \varlimsup_{t\to 0} 2t \log p(t,x,y) \leq -C_4 d(x,y)^2.$$

一般化:

$M \rightsquigarrow E$: 一般の空間 (例えば無限次元空間)

このような場合，推移確率密度は一般に存在しないので定式化を変更する必要がある.

枠組: (対称の場合の先行研究)

$(E, \mathcal{B}, \mu)$: σ-有限測度空間
$(\mathcal{E}, \mathbb{D})$: $L^2(E, \mu)$ 上の対称 Dirichlet 形式
$\{T_t\}$: $(\mathcal{E}, \mathbb{D})$ に付随する対称 Markov 半群

$$A, B \in \mathcal{B}, \quad 0 < \mu(A) < \infty, 0 < \mu(B) < \infty$$

$$P_t(A, B) := \int_E \mathbf{1}_A \cdot T_t \mathbf{1}_B \, d\mu$$

$$\left(= \iint_{A \times B} p_t(x, y)\, \mu(dx) \mu(dy) \right)$$

$$\left(\text{“} = \text{”} \mathbb{P}[X_0 \in A,\ X_t \in B] \right)$$

積分型 Varadhan 評価

$$\lim_{t\to 0} 2t \log P_t(A,B) = -\mathrm{d}(A,B)^2$$

- S. Fang (1994): Wiener 空間上の Ornstein–Uhlenbeck 半群
- (2000–2002): 会田, 河備, T. S. Zhang, H.,. . . いろいろな一般化
- J. A. Ramírez (2001), H.–J. A. Ramírez (2003), 有吉–H. (2005): 更に一般の場合

積分型 Varadhan 評価

$$\lim_{t\to 0} 2t \log P_t(A, B) = -\mathrm{d}(A, B)^2$$

- S. Fang (1994): Wiener 空間上の Ornstein–Uhlenbeck 半群
- (2000–2002): 会田, 河備, T. S. Zhang, H.,. . .
  いろいろな一般化
- J. A. Ramírez (2001), H.–J. A. Ramírez (2003), 有吉–H. (2005): 更に一般の場合

積分型 Varadhan 評価

$$\lim_{t\to 0} 2t \log P_t(A, B) = -\mathrm{d}(A, B)^2$$

- S. Fang (1994): Wiener 空間上の Ornstein–Uhlenbeck 半群
- (2000–2002): 会田, 河備, T. S. Zhang, H.,. . .
  いろいろな一般化
- J. A. Ramírez (2001), H.–J. A. Ramírez (2003), 有吉–H. (2005): 更に一般の場合

定理 0 (有吉–H. (2005)).

対称 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathbb{D})$ は強局所とする.
このとき, $\mu(A),\mu(B)\in(0,\infty)$ なる $^\forall A, ^\forall B\in\mathcal{B}$ に対して

$$\lim_{t\to 0} 2t\log P_t(A,B) = -\mathrm{d}(A,B)^2.$$

(“内在的距離” $\mathrm{d}(A,B)$ については後述)

典型例

$$\mathcal{E}(f,g)=\frac{1}{2}\int_E (Df,Dg)_H\,d\mu,\quad f,g\in\mathbb{D}$$

H: 可分 Hilbert 空間, D: E 上の H-値 1 階微分作用素

問題: 非対称の場合は？

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_E \Big\{ \frac{1}{2}(Df, Dg)_H + (b, Df)_H g + (c, Dg)_H f + Vfg \Big\} d\mu$$

強局所対称 Dirichlet 形式＋低階の摂動項

$$\left(\mathcal{L} = -\frac{1}{2} D^* D - (b, D\cdot)_H - D^*(c\cdot) - V\cdot \right)$$

2. 設定

$(E,\mathcal{B},\mu)$: σ-有限測度空間

H: 可分 Hilbert 空間

D: H-値 1 階微分閉作用素: $L^2(\mu)\supset\mathbb{D}\to L^2(E\to H,\mu)$

$$\left(\begin{array}{l} f_1,\dots,f_m\in\mathbb{D}\text{ と }F(0)=0\text{ なる }F\in C_b^1(\mathbb{R}^m)\text{ に対して}\\ F(f_1,\dots,f_m)\in\mathbb{D}\text{ で,}\\ D\big(F(f_1,\dots,f_m)\big)=\sum_{j=1}^m(\partial_jF)(f_1,\dots,f_m)Df_j. \end{array}\right)$$

$$\mathcal{E}^0(f,g):=\frac{1}{2}\int_E(Df,Dg)_H\,d\mu,\quad f,g\in\mathbb{D}.$$

$(\mathcal{E}^0,\mathbb{D})$ は $L^2(\mu)$ 上の強局所対称 Dirichlet 形式.

$(\mathcal{E}^0, \mathbb{D})$ に付随する概念に関して幾つか準備：

$A \in \mathcal{B}$ に対して,

$$\mathbb{D}_A := \{f \in \mathbb{D} \mid f = 0\ \mu\text{-a.e. on } E \setminus A\},$$
$$\mathbb{D}_{A,b} := \mathbb{D}_A \cap L^\infty(\mu)$$

定義 1 (有吉–H.). E の増大可測部分集合列 $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ が measurable nest であるとは次が成り立つことをいう.

(1) $^\forall k \in \mathbb{N}$, $^\exists \chi_k \in \mathbb{D}$ s.t. $\chi_k \geq 1$ μ-a.e. on E_k,

(2) $\bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{D}_{E_k}$ は $\mathbb{D}$ で稠密.

定義 2. Measurable nest $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ と $p \in [1,\infty]$ に対して,

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\mu, \{E_k\}) = \{f \in L^0(\mu) \mid f \cdot \mathbf{1}_{E_k} \in L^p(\mu),\ {}^{\forall}k \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathbb{D}_{\mathrm{loc},b}(\{E_k\}) = \left\{ f \in L^{\infty}(\mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^{\exists}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{D} \text{ s.t.} \\ f = f_k\ \mu\text{-a.e. on } E_k \\ \text{for each } k \in \mathbb{N} \end{array} \right\},$$

$$\mathbb{D}_0(\{E_k\}) = \left\{ f \in \mathbb{D}_{\mathrm{loc},b}(\{E_k\}) \;\middle|\; |Df|_H \le 1\ \mu\text{-a.e.} \right\}.$$

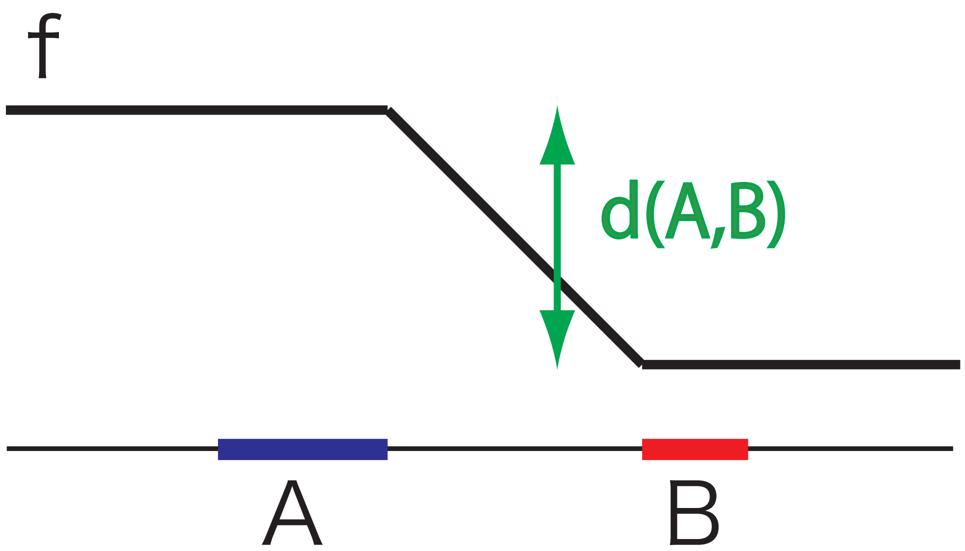
実は $\mathbb{D}_0(\{E_k\})$ は $\{E_k\}$ の取り方に依らないので，単に $\mathbb{D}_0$ と表す.

($\mathbb{D}_0 =$“有界な 1-Lipschitz 関数の全体”)

定義 3 (内在的距離).

$\mu(A), \mu(B) > 0$ なる $A, B \in \mathcal{B}$ に対して,

$$\mathbf{d}(A,B) := \sup_{f \in \mathbb{D}_0} \left\{ \operatorname*{ess\,inf}_{x \in A} f(x) - \operatorname*{ess\,sup}_{x \in B} f(x) \right\} \in [0, \infty].$$



$b, c: E \to H$, $V: E \to \mathbb{R}$, 可測

仮定 (A):

(A1) $^\exists$a measurable nest $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ s.t.
$|b|_H, |c|_H \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu, \{E_k\})$, $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu, \{E_k\})$.

(A2) $^\exists\eta \in [0,1)$, $^\exists\theta \geq 0$, $^\exists\omega \geq 0$, and $^\exists l \geq 0$ s.t.
$^\forall f, g \in \bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{D}_{E_k, b}$,

$$\left| \int_E \{(b, Df)_H g + (c, Dg)_H f + V f g\} \, d\mu \right| \leq \omega \mathcal{E}^0_l(f)^{1/2} \mathcal{E}^0_l(g)^{1/2},$$

$$-\int_E \{(b + c, Df)_H f + V f^2\} \, d\mu \leq \eta \mathcal{E}^0(f) + \theta \|f\|_2^2.$$

$f, g \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k, b}$ に対して

$$\mathcal{E}(f,g) := \mathcal{E}^0(f,g) + \int_E \{(b, Df)_H g + (c, Dg)_H f + V f g\}\, d\mu.$$

すると,

$$\mathcal{E}(f) + \theta \|f\|_2^2 \geq (1-\eta)\mathcal{E}^0(f),$$

$$|\mathcal{E}(f,g)| \leq (1+\omega)\mathcal{E}_l^0(f)^{1/2}\mathcal{E}_l^0(g)^{1/2}.$$

よって $\mathcal{E}$ は $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ 上の双線形形式に連続拡張され,
$\mathbb{D} \times \mathbb{D} \ni (f,g) \mapsto \mathcal{E}(f,g) + \theta \int_E f g \, d\mu$ は $L^2(\mu)$ 上の coercive closed form となる.

$(\mathcal{E}, \mathbb{D}) \longleftrightarrow L^2(\mu)$ 上の強連続半群 $\{T_t\}_{t>0}$

$\left(\mathcal{L} = -\frac{1}{2}D^*D - (b, D\cdot)_H - D^*(c\cdot) - V\cdot\right)$

- $\{T_t\}$ は正値保存的.
  ($f \geq 0$ μ-a.e. $\Rightarrow T_t f \geq 0$ μ-a.e.)

- $\{T_t\}$ は Markov 性を持つとは限らない.
  ($0 \leq f \leq 1$ μ-a.e. $\not\Rightarrow 0 \leq T_t f \leq 1$ μ-a.e.)

$$A, B \in \mathcal{B},\ 0 < \mu(A) < \infty,\ 0 < \mu(B) < \infty$$

$$P_t(A,B) := \int_E \mathbf{1}_A \cdot T_t \mathbf{1}_B \, d\mu.$$

問: どのような条件下で

$$\lim_{t\to 0} 2t \log P_t(A,B) = -\mathrm{d}(A,B)^2$$

となるか？

もし b, c, V が十分小さければ正しいだろう.
しかしどの程度まで？

考察:

(1) もし $\int_E \{(b, Df)_H g + (c, Dg)_H f + Vfg\} d\mu$ が $\mathcal{E}_l^0(f,f)^{1/2}\mathcal{E}_l^0(g,g)^{1/2}$ に比べて十分小さければ, この項は極限に影響しないだろう.

(例えば, $V \equiv 0$ として, $^\forall\varepsilon > 0$, $^\exists\lambda \geq 0$ s.t.

$$\int_E (|b|_H^2 + |c|_H^2) f^2 \, d\mu \leq \varepsilon\mathcal{E}^0(f) + \lambda\|f\|_2^2, \quad {}^\forall f \in \mathbb{D}$$

など)

(2) **半群の確率論的表現を用いた議論との比較：**

例えば，$\{X_t\}$ を $\mathbb{R}^d$ の有界領域上のブラウン運動，$c \equiv 0, V \equiv 0$ とすると，丸山–Girsanov の定理より

$$P_t(A, B) = \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_A(X_0)\mathbf{1}_B(X_t) \times \exp\left(\int_0^t b(X_s) \cdot dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b(X_s)|^2\, ds\right)\Big].$$

Hölder および Jensen の不等式から，ある $\delta > 0$ に対して $\exp(\delta|b|^2)$ が可積分ならば，指数マルチンゲール部分は Varadhan 型評価に影響しない．

しかし，この可積分条件は (1) における "小ささ" とあまり整合的でない．

3. 主結果

by H. and Kouhei Matsuura, preprint.

(arXiv:1611.02954)

定理 4 (上からの評価). 仮定 (A) と以下を仮定する:

(B1) $^\exists\kappa > 0$ s.t. for $^\forall f \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k,b}$,

$$\left| \int_E (b - c, Df)_H f \, d\mu \right| \le \kappa \mathcal{E}_1^0(f).$$

(B2) $^\exists\gamma \ge 0$ and $\{\lambda_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \mathbb{R}_+$ s.t. $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\lambda_\varepsilon = 0$ and

$$\int_E |b - c|_H f^2 \, d\mu \le \varepsilon\mathcal{E}^0(f) + \lambda_\varepsilon + \gamma\left(\int_E f^2 \log^+ f^2 \, d\mu\right)^{1/2}$$

for $^\forall\varepsilon > 0$ and $^\forall f \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k,b}$ with $\|f\|_2 = 1$.

すると,

(*) $\quad ^\forall A, {}^\forall B, \quad \overline{\lim_{t\to 0}}\, 2t \log P_t(A, B) \le -\mathbf{d}(A, B)^2.$

定理 5 (下からの評価). 仮定 (A) と上からの評価:

$$(*) \qquad {}^\forall A, {}^\forall B, \quad \varlimsup_{t\to 0} 2t \log P_t(A,B) \le -\mathbf{d}(A,B)^2$$

を仮定する．すると,

$$ {}^\forall A, {}^\forall B, \ \varliminf_{t\to 0} 2t \log P_t(A,B) \ge -\mathbf{d}(A,B)^2.$$

(したがって,

$$ {}^\forall A, {}^\forall B, \ \lim_{t\to 0} 2t \log P_t(A,B) = -\mathbf{d}(A,B)^2.)$$

仮定 (A), (B1), (B2) について：

((A1) は常に仮定しておく)

$\alpha > 0$ に対して

$$\mathcal{T}_\alpha := \left\{ \psi \,\middle|\, \begin{array}{l} {}^\exists \lambda \geq 0 \text{ s.t. } \int_E |\psi| f^2 \, d\mu \leq \alpha \mathcal{E}^0(f) + \lambda \|f\|_2^2 \\ \text{for } {}^\forall f \in \bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{D}_{E_k, b} \end{array} \right\}.$$

命題 6. ある $\alpha_i > 0$, $\sqrt{2\alpha_1} + \alpha_4 < 1$ に対して

$$|b + c|_H^2 \in \mathcal{T}_{\alpha_1}, \ |b - c|_H^2 \in \mathcal{T}_{\alpha_2}, \ V_+ \in \mathcal{T}_{\alpha_3}, \ V_- \in \mathcal{T}_{\alpha_4}$$

ならば, (A.2) が成立する.

$$\mathcal{T}_\alpha := \left\{ \psi \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^\exists\lambda \geq 0 \text{ s.t. } \displaystyle\int_E |\psi| f^2\, d\mu \leq \alpha\mathcal{E}^0(f) + \lambda\|f\|_2^2 \\ \text{for } {}^\forall f \in \bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{D}_{E_k,b} \end{array} \right\}.$$

命題 7. ある $\alpha > 0$ に対して $|b - c|_H^2 \in \mathcal{T}_\alpha$ ならば，(B1) が成り立つ.

命題 8. $b = b_1 + b_2$, $c = c_1 + c_2$ で以下が成り立つとき，(B2) が成り立つ.

(1) $|b_1 - c_1|_H^2 \in \bigcap_{\alpha>0} \mathcal{T}_\alpha$.

(2) ${}^\exists\delta > 0$ s.t. $\exp(\delta|b_2 - c_2|_H^2) - 1 \in L^1(\mu)$.

例 1. Sobolev の不等式を仮定：
ある $d > 2$ と $S \geq 0$ に対して,

$$\|f\|_{2d/(d-2)}^2 \leq S\,\mathcal{E}_1^0(f), \quad f \in \mathbb{D}.$$

このとき, $L^{d/2}(\mu) + L^\infty(\mu) \subset \bigcap_{\alpha>0} \mathcal{T}_\alpha$. これより,

$$|b|_H, |c|_H \in L^d(\mu) + L^\infty(\mu), \; V \in L^{d/2}(\mu) + L^\infty(\mu)$$

ならば, 仮定 (A), (B.1), (B.2) が成立.

この場合, (B.2) の対数を含む項は有り難みがない.

例 2. $\mu(E) < \infty$ とし，対数 Sobolev 不等式を仮定:

$$\int_E f^2 \log(f^2/\|f\|_2^2)\, d\mu \le \alpha \mathcal{E}^0(f) + \beta \|f\|_2^2, \quad f \in \mathbb{D}.$$

このとき，$e^{\delta|\psi|} \in L^1(\mu) \Rightarrow \psi \in \mathcal{T}_{\alpha/\delta}$. これより，

$\sqrt{2\alpha/\delta_1} + \alpha/\delta_4 < 1$ なる $\delta_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ に対して

$$e^{\delta_1|b+c|_H^2}, e^{\delta_2|b-c|_H^2}, e^{\delta_3 V_+}, e^{\delta_4 V_-} \in L^1(\mu)$$

が成り立つならば，仮定 (A), (B1), (B2) が成立.

この場合，(B2) に対数を含む項があることが有用.

定理 4（上からの評価）の証明: Davies–Gaffney の方法

先行研究では: $\alpha > 0$ と $w \in \mathbb{D}_0$ に対して

$f(t) := \int_E (e^{\alpha w} T_t \mathbf{1}_B)^2 \, d\mu$ と定め,

不等式 $f'(t) \le \alpha^2 f(t)$ を導く. $\rightsquigarrow$ $f(t) \le e^{\alpha^2 t} f(0)$

このままでは (B2) の対数を含む項が処理できない.

(B1) ${}^{\exists}\kappa > 0$ s.t. for ${}^{\forall} f \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k, b}$,

$$\left| \int_E (b - c, Df)_H f \, d\mu \right| \le \kappa \mathcal{E}_1^0(f).$$

(B2) ${}^{\exists}\gamma \ge 0$ and $\{\lambda_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0} \subset \mathbb{R}_+$ s.t. $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \lambda_\varepsilon = 0$ and

$$\int_E |b - c|_H f^2 \, d\mu \le \varepsilon \mathcal{E}^0(f) + \lambda_\varepsilon + \gamma \left(\int_E f^2 \log^+ f^2 \, d\mu \right)^{1/2}$$

for ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ and ${}^{\forall} f \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k, b}$ with $\|f\|_2 = 1$.

定理 4（上からの評価）の証明: Davies–Gaffney の方法

先行研究では: $\alpha > 0$ と $w \in \mathbb{D}_0$ に対して

$f(t) := \int_E (e^{\alpha w} T_t \mathbf{1}_B)^2 \, d\mu$ と定め,

不等式 $f'(t) \le \alpha^2 f(t)$ を導く. $\rightsquigarrow$ $f(t) \le e^{\alpha^2 t} f(0)$

このままでは (B2) の対数を含む項が処理できない.

(B1) $^\exists\kappa > 0$ s.t. for $^\forall f \in \bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{D}_{E_k,b}$,

$$\left| \int_E (b - c, Df)_H f \, d\mu \right| \le \kappa \mathcal{E}_1^0(f).$$

(B2) $^\exists\gamma \ge 0$ and $\{\lambda_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \mathbb{R}_+$ s.t. $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\lambda_\varepsilon = 0$ and

$$\int_E |b - c|_H f^2 \, d\mu \le \varepsilon \mathcal{E}^0(f) + \lambda_\varepsilon + \gamma \left(\int_E f^2 \log^+ f^2 \, d\mu \right)^{1/2}$$

for $^\forall\varepsilon > 0$ and $^\forall f \in \bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{D}_{E_k,b}$ with $\|f\|_2 = 1$.

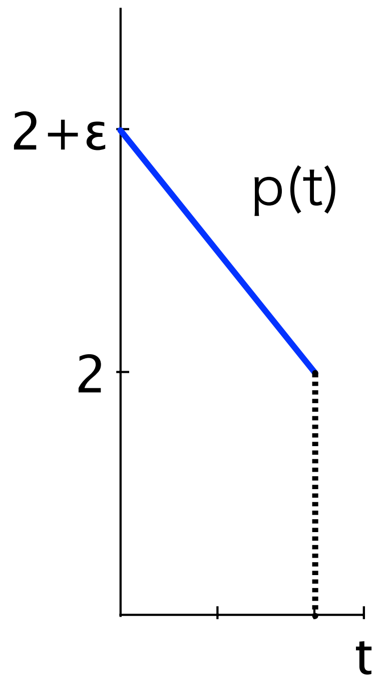
今回，$f(t) := \int_E (e^{\alpha w} T_t \mathbf{1}_B)^{p(t)}\, d\mu$

$(p(t) = 2 + \varepsilon - Ct)$ とし，微分不等式

$$f'(t) \le (1 + \tilde{\varepsilon})\alpha^2 f(t) + \beta f(t) \max\{0, -\log f(t)\}$$

（β はある正定数）を導く.

幸い，対数項は Varadhan 型評価に影響しない.



今回，$f(t) := \int_E (e^{\alpha w} T_t \mathbf{1}_B)^{p(t)}\, d\mu$
$(p(t) = 2 + \varepsilon - Ct)$ とし，微分不等式

$$f'(t) \leq (1 + \tilde{\varepsilon})\alpha^2 f(t) + \beta f(t) \max\{0, -\log f(t)\}$$

（β はある正定数）を導く.

幸い，対数項は Varadhan 型評価に影響しない.

実際は，この f の定め方は $\mu(E) < \infty$ のときのみ有効.

一般の場合は $f(t) := \displaystyle\int_E \tau(e^{\alpha w} T_t \mathbf{1}_B, p(t))\, d\mu$,

$\tau(x, y) \sim x^2 \vee x^y$ とする必要がある.

今回，$f(t) := \int_E (e^{\alpha w} T_t \mathbf{1}_B)^{p(t)}\, d\mu$
$(p(t) = 2 + \varepsilon - Ct)$ とし，微分不等式

$$f'(t) \le (1 + \tilde{\varepsilon})\alpha^2 f(t) + \beta f(t) \max\{0, -\log f(t)\}$$

（β はある正定数）を導く.

幸い，対数項は Varadhan 型評価に影響しない.

実際は，この f の定め方は $\mu(E) < \infty$ のときのみ有効.

一般の場合は $f(t) := \displaystyle\int_E \tau(e^{\alpha w} T_t \mathbf{1}_B, p(t))\, d\mu$,
$\tau(x, y) \sim x^2 \vee x^y$ とする必要がある.

また，この議論のためには $\{T_t\}$ と $\{\hat{T}_t\}$ が L^p-強連続半群であることが必要.（${}^\exists p > 2$）

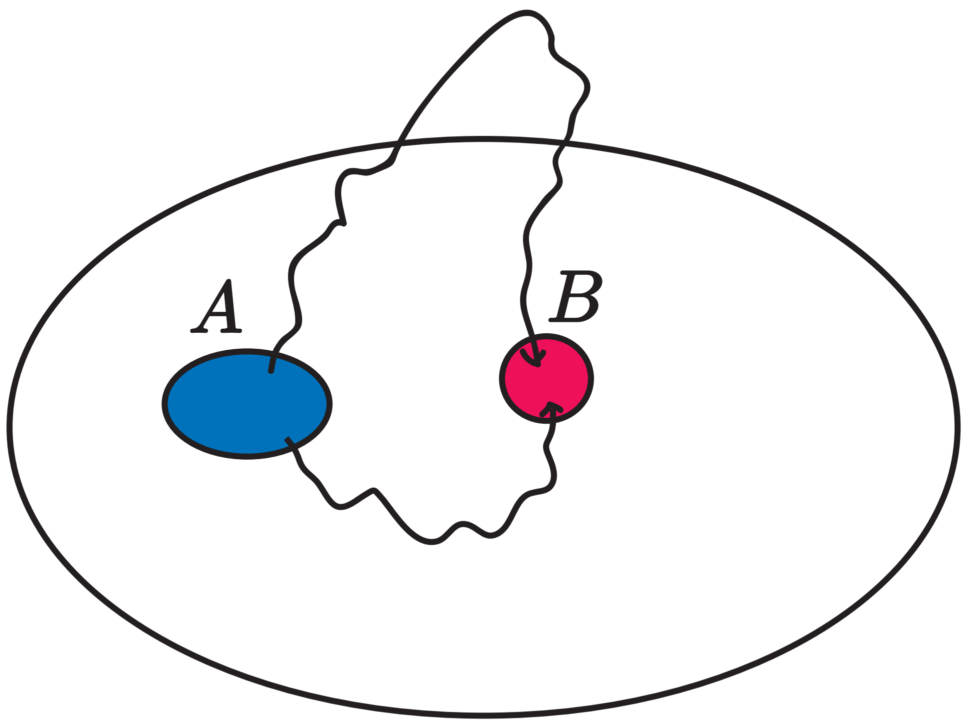
命題 9. 仮定 (A), (B1) の下で, ${}^{\exists}q > 2$ s.t. ${}^{\forall}p \in [q', q]$, $\{T_t\}_{L^2(\mu)\cap L^p(\mu)}$, $\{\hat{T}_t\}_{L^2(\mu)\cap L^p(\mu)}$ は $L^p(\mu)$ 上の強連続半群に連続拡張される. ここで $1/q + 1/q' = 1$.

定理 5（下からの評価）の証明は対称 Dirichlet 形式の場合 (H.–Ramírez, 有吉–H.) の証明に準じるが，かなり修正が必要.

- 摂動項の処理
- $\{T_t\}$ が Markov 的とは限らないことによる，議論の修正

4. もう少し改良

直感的には，$2t\log P_t(A,B)$ の $t\to 0$ での挙動には，集合 A,B から遠く離れた点における b,c,V の値は効いてこないはず.



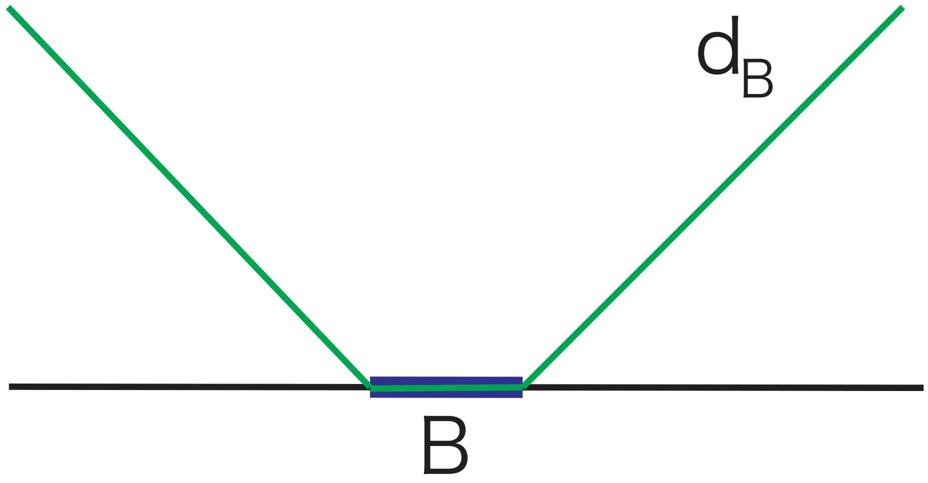
定理. 仮定 (A) のもと，$\mathbf{d}(A,B)=\infty$ ならば，${}^{\forall}t>0$, $P_t(A,B)=0$.

よって，以下では $\mathbf{d}(A,B)<\infty$ の場合のみ考えればよい.

$B \in \mathcal{B}$ に対して，次の性質を持つ関数 $\mathbf{d}_B$ が（μ-a.e. の意味で）一意に存在する：

$\mu(A) > 0$ なる任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x \in A} \mathbf{d}_B(x) = \mathbf{d}(A, B).$$



さらに，任意の $N \geq 0$ に対して $\mathbf{d}_B \wedge N \in \mathbb{D}_0$ である．

定理 4'. $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$, $\mathbf{d}(A,B) < \infty$ とし, 仮定 (A), (B1) および以下を仮定する.

$$^{\exists}\gamma \geq 0,\ ^{\exists}\{\lambda_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \mathbb{R}_+ \text{ s.t. } \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\lambda_\varepsilon = 0,$$

$$\int_{\{0<\mathbf{d}_B<\mathbf{d}(A,B)\}} (b - c, D\mathbf{d}_B)_H f^2\, d\mu$$

$$\leq \varepsilon\mathcal{E}^0(f) + \lambda_\varepsilon + \gamma\left(\int_E f^2 \log^+ f^2\, d\mu\right)^{1/2}$$

$$\text{for } ^{\forall}\varepsilon > 0 \text{ and } ^{\forall} f \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k,b} \text{ with } \|f\|_2 = 1.$$

このとき,

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\, 2t \log P_t(A,B) \leq -\mathbf{d}(A,B)^2.$$

定理 5'. 仮定 (A) のもと, $0 < \mu(B) < \infty$, $N > 0$ とする. もし $\mathrm{d}(A, B) < N$ なる任意の $A \in \mathcal{B}$, $0 < \mu(A) < \infty$ に対して

$$\varlimsup_{t \to 0} 2t \log P_t(A, B) \leq -\mathrm{d}(A, B)^2$$

が成立するならば, これらの A に対して

$$\lim_{t \to 0} 2t \log P_t(A, B) = -\mathrm{d}(A, B)^2.$$