Integrated version of Varadhan's asymptotics for lower order perturbations of strong local Dirichlet forms[*1]
（松浦浩平氏（東北大学）との共同研究）

日野 正訓 （京都大学）

σ-有限測度空間 $(E,\mathcal{B},\mu)$ 上に定まる強局所対称 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}^0,\mathbb{D})$ に対して，対応する Markov 半群 $\{T_t^0\}$ の積分型 Varadhan 評価が常に成り立つ [3, 2, 1]:

定理 1 $A,B\in\mathcal{B}$, $\mu(A),\mu(B)\in(0,\infty)$ のとき，$P_t^0(A,B)=\int_A T_t^0\mathbf{1}_B\,d\mu$ とおくと，

$$\lim_{t\to 0} t\log P_t^0(A,B)=-\frac{\mathsf{d}(A,B)^2}{2}.$$

ここで $\mathsf{d}(A,B)$ は A,B 間の内在的距離で，$(\mathcal{E}^0,\mathbb{D})$ から直接定まる量である．本講演では，強局所対称 Dirichlet 形式に低階の摂動項を付け加えたとき，同様の評価が成り立つための十分条件を与える．

以下，設定と結果を述べる．H を実可分 Hilbert 空間，D を $L^2(E,\mu)$ から $L^2(E\to H,\mu)$ への，定義域を $\mathbb{D}$ とする閉作用素で，連鎖律をみたすものとする．すなわち，$f_1,f_2,\dots,f_m\in\mathbb{D}$ と $F\in C^1(\mathbb{R}^m)$ で 1 階偏導関数がすべて有界かつ $F(0)=0$ となるものに対して，$F(f_1,\dots,f_m)\in\mathbb{D}$ であり $D\bigl(F(f_1,\dots,f_m)\bigr)=\sum_{j=1}^m(\partial_jF)(f_1,\dots,f_m)DF_j$. さて，$f,g\in\mathbb{D}$ に対して

$$\mathcal{E}^0(f,g)=\frac{1}{2}\int_E(Df,Dg)_H\,d\mu$$

と定めると，これは $L^2(E,\mu)$ 上の強局所 Dirichlet 形式となる．$A\in\mathcal{B}$ に対して以下のように定める．

$$\mathbb{D}_A=\{f\in\mathbb{D}\mid f=0\ \mu\text{-a.e. on }E\setminus A\},\quad \mathbb{D}_{A,b}=\mathbb{D}_A\cap L^\infty(\mu).$$

定義 2（cf. [1]） 増大可測集合列 $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ が以下の条件をみたすとき measurable nest という．

(i) 各 $k\in\mathbb{N}$ に対し，E_k 上で $h_k\geq 1$ μ-a.e. となる $h_k\in\mathbb{D}$ が存在する．
(ii) $\bigcup_{k=1}^\infty\mathbb{D}_{E_k}$ は $\mathbb{D}$ で稠密．ここで $\mathbb{D}$ には内積 $\mathcal{E}^0(f,g)+(f,g)_{L^2(\mu)}$ から定まる位相を入れる．

さらに，measurable nest $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ と $p\in[1,\infty]$ に対して以下のように定める．

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\mu,\{E_k\})=\{f\in L^0(\mu)\mid \text{すべての } k\in\mathbb{N} \text{ に対して } f\mathbf{1}_{E_k}\in L^p(\mu)\},$$
$$\mathbb{D}_{\mathrm{loc},b}(\{E_k\})=\{f\in L^\infty(\mu)\mid \{f_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{D} \text{ が存在して，各 } k\in\mathbb{N} \text{ に対して } f=f_k\ \mu\text{-a.e. on } E_k\},$$
$$\mathbb{D}_0(\{E_k\})=\bigl\{f\in\mathbb{D}_{\mathrm{loc},b}(\{E_k\})\bigm| |Df|_H\leq 1\ \mu\text{-a.e.}\bigr\}.$$

このとき，関数空間 $\mathbb{D}_0(\{E_k\})$ は $\{E_k\}$ の取り方によらない（[1, Proposition 3.9]）ため，これを単に $\mathbb{D}_0$ で表す．測度正の集合 $A,B\in\mathcal{B}$ に対して内在的距離を以下のように定める．

$$\mathsf{d}(A,B)=\sup_{f\in\mathbb{D}_0}\left\{\operatorname*{ess\,inf}_{x\in A}f(x)-\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B}f(x)\right\}\in[0,\infty].$$

さて，b,c を E 上の H-値可測関数，V を E 上の実数値可測関数とし，以下を仮定する．

(A.1) measurable nest $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ が存在して $|b|_H,|c|_H\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu,\{E_k\})$, $V\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu,\{E_k\})$.

[*1] 本研究は JSPS 科研費 JP15H03625 の助成を受けたものです．

(A.2) $\eta \in [0,1)$, $\theta \geq 0$, $\omega \geq 0$, $l \geq 0$ が存在して，任意の $f, g \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k,b}$ に対して

$$-\int_E \{(b+c, Df)_H f + V f^2\}\, d\mu \leq \eta \mathcal{E}^0(f,f) + \theta \|f\|_2^2,$$
$$\left|\int_E \big\{(b, Df)_H g + (c, Dg)_H f + V f g\big\}\, d\mu\right| \leq \omega \mathcal{E}_l^0(f,f)^{1/2} \mathcal{E}_l^0(g,g)^{1/2}.$$

ここで $\mathcal{E}_l^0(f,f) = \mathcal{E}^0(f,f) + l\|f\|_{L^2(\mu)}^2$. 双線形形式 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E}(f,g) = \mathcal{E}^0(f,g) + \int_E \big\{(b, Df)_H g + (c, Dg)_H f + V f g\big\}\, d\mu, \quad f, g \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k,b}$$

と定めると，これは $(\mathcal{E}, \mathbb{D})$ 上の双線形形式に自然に拡張され，L^2 強連続半群 $\{T_t\}$ が対応する．$\{T_t\}$ は正値保存性を持つが，一般に Markov 性を持つとは限らない．$A \in \mathcal{B}$ かつ $0 < \mu(A) < \infty$ となる A の全体を $\mathcal{B}_0$ とし，$A, B \in \mathcal{B}_0$ に対して $P_t(A,B) = \int_A T_t \mathbf{1}_B\, d\mu$ と定める．以下が主定理である．

定理 3　(A.1), (A.2) に加え，更に以下を仮定する．

(B.1)　ある $\kappa > 0$ に対して

$$\left|\int_E (b-c, Df)_H f\, d\mu\right| \leq \kappa \mathcal{E}_1^0(f,f), \quad f \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k,b}.$$

(B.2)　ある $\gamma \geq 0$ と $\{\lambda_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset [0,\infty)$ が存在して，$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\lambda_\varepsilon = 0$ かつ以下をみたす：任意の $\varepsilon > 0$ と $\|f\|_2 = 1$ なる $f \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k,b}$ に対して，

$$\int_E |b-c|_H f^2\, d\mu \leq \varepsilon \mathcal{E}^0(f) + \lambda_\varepsilon + \gamma \Big(\int_E f^2 \log^+ f^2\, d\mu\Big)^{1/2}.$$

このとき，

$$\varlimsup_{t\to 0} t \log P_t(A,B) \leq -\frac{\mathsf{d}(A,B)^2}{2}, \quad A, B \in \mathcal{B}_0. \tag{1}$$

定理 4　(A.1), (A.2) に加え，(1) が成り立つとする．このとき，

$$\varliminf_{t\to 0} t \log P_t(A,B) \geq -\frac{\mathsf{d}(A,B)^2}{2}, \quad A, B \in \mathcal{B}_0. \tag{2}$$

(B.2) の分かりやすい十分条件と典型例は講演中に与える．定理 3 の証明は Davies–Gaffney の議論の修正，定理 4 の証明は [1] の議論の修正に基づく．(B.2) の式の右辺で対数項を許しているところがポイントで，b, c に関する制約条件が弱くなる一方，定理 3 の証明には L^p-analysis を必要とする．特に，以下の命題が一つの鍵となる．

命題 5　(A.1), (A.2), (B.1) の仮定のもと，$q = \frac{\kappa+2+\sqrt{\kappa^2+4(1-\eta)}}{\kappa+\eta}$ (>2), $q' = q/(q-1)$ とすると，$p \in [q', q]$ のとき $\{T_t|_{L^2(\mu)\cap L^p(\mu)}\}$ は $L^p(\mu)$ 上の強連続半群に拡張される．

条件 (B.2) と定理 3, 4 の主張は更に「局所化」することもできる．時間があれば講演中に説明する．

参考文献

[1] Ariyoshi, T. and Hino, M., Small-time asymptotic estimate in local Dirichlet spaces, Electron. J. Probab. **10** (2005), 1236–1259.

[2] Hino, M. and Ramírez, J. A., Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups, Ann. Probab. **14** (2003), 1254–1295.

[3] Ramírez, J. A., Short time asymptotics in Dirichlet spaces, Comm. Pure Appl. Math **54** (2001), 259–293.