

Rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms

会田茂樹

東北大学

2016 年 11 月 9 日

Introduction

- $D \subset \mathbb{R}^d$, 境界は条件 (A), (B) を満たす.
- この条件の下, リプシッツ係数の反射壁確率微分方程式は強い一意解をもつことが知られている (田中, Lions-Sznitmann, 税所).
- 条件 (A), (B), (H1) の下, ラフパスで drive された reflected rough differential equations の解の存在・評価を示した. (Euler-Maruyama 近似によるアプローチ)
- 今回は, (A), (B) のみの条件で解の存在・評価を示す.

Introduction

- Euler-Maruyama 近似
- Controlled path の空間での Schauder の不動点定理 (今回の話の内容)

いずれでも同様な結果が得られることがわかった.
Schauder の不動点定理を用いたアプローチでは
path-dependent な RDE の解の存在定理として定式化
するのが自然である.

Remark 1

$\mathbf{X}_t$: p -rough path とする ($2 \leq p < 3$). $\gamma > p$ となる正数をとる. $\sigma \in \mathbf{Lip}^\gamma$ のとき, RDE $dY_t = \sigma(Y_t)d\mathbf{X}_t$ は一意的な解をもつ. 解の存在は Davie と Gubinelli により独立に $\sigma \in \mathbf{Lip}^{\gamma-1}$ の下で示された.

Plan of talk

- 1 反射壁確率微分方程式
- 2 Path-dependent rough differential equations
- 3 Main Results
- 4 Support theorem for reflected diffusions

条件 (A), (B), Skorohod 方程式

$D \subset \mathbb{R}^d$: open connected set, $x \in \partial D$,

$\mathcal{N}_{x,r} = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d \mid |\mathbf{n}| = 1, B(x - r\mathbf{n}, r) \cap D = \emptyset\},$

$\mathcal{N}_x = \cup_{r>0} \mathcal{N}_{x,r},$

$B(a, r) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y - a| < r\}.$

Condition (A) (Uniform exterior sphere condition)

$$\exists r_0 > 0, \mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x,r_0} \neq \emptyset \quad \forall x \in \partial D.$$

Condition (B) There exist $\delta > 0$, $\delta' \leq 1$ and a unit vector l_x for any $x \in \partial D$ such that

$$\inf \left\{ (l_x, \mathbf{n}) \mid \mathbf{n} \in \cup_{y \in B(x, \delta) \cap \partial D} \mathcal{N}_y \right\} \geq \delta'.$$

$$w \in C([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d), w_0 \in \bar{D}$$

に付随した Skorohod 方程式

$$y_t = w_t + \phi_t, \quad y_t \in \bar{D} \quad t \geq 0,$$

$$\phi_t = \int_0^t 1_{\partial D}(y_s) \mathbf{n}(s) d\|\phi\|_{1-var, [0, s]}, \quad t \geq 0,$$

$$\mathbf{n}(s) \in \mathcal{N}_{y_s} \text{ if } y_s \in \partial D$$

- (Saisho) 条件 (A), (B) の下、Skorohod 方程式は一意的な解を持つ。かつ、 $\Gamma : w \mapsto y$ は sup-norm の位相で連続。写像 $L : w \mapsto \phi$ は次の評価を持つ：

$$(H1)' \quad \|L(w)\|_{1-var, [s, t]} \leq F(\|w\|_{1/\beta-var, [s, t]}) \|w\|_{\infty-var, [s, t]}$$

条件 (A), (B) の下, σ がリプシッツ連続の時, 反射壁 SDE

$$Y_t = y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s + \Phi_t,$$
$$L\left(y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s\right)_t = \Phi_t$$

は一意的な強い解を持つ. $Z_t = y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s$ とおくと Z_t は Path-dependent SDE

$$Z_t = y_0 + \int_0^t \sigma(Z_s + L(Z)_s) dB_s$$

の一意解である.

より一般に写像 L に対する適当な仮定の下, RDE

$$Z_t = \xi + \int_0^t \sigma(Z_s, L(Z)_s) dX_s$$

の解の存在を示す. $L(Z)_t = \Phi_t$ と書くと, この方程式は

$$\begin{aligned} Z_t &= \xi + \int_0^t \sigma(Z_s, \Phi_s) dX_s, \\ \Phi_t &= L\left(\xi + \int_0^t \sigma(Z_s, \Phi_s) dX_s\right)_t \end{aligned}$$

となる. X の Controlled paths の空間と Φ の積空間 $\mathcal{D}_X^{2\theta_1} \times \mathcal{V}_{q,\theta_2}$ 上で Schauder の不動点定理を使い, 解の存在・評価を示す.

$1/\beta$ -rough path

- $1/3 < \beta \leq 1/2$.
- $\mathbf{X}_{s,t} = (X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t})$ ($0 \leq s \leq t \leq T$) : $1/\beta$ -rough path on $\mathbb{R}^n$ with the control function ω .

$$|X_{s,t}| \leq \|X\|_{\beta} \omega(s, t)^{\beta}, \quad |\mathbb{X}_{s,t}| \leq \|\mathbb{X}\|_{2\beta} \omega(s, t)^{2\beta},$$

- $\mathcal{C}^{\beta}(\mathbb{R}^n)$: the set of $1/\beta$ -rough paths
- $\omega(s, t) = |t - s| \implies \mathbf{X}_{s,t}$ is a β -Hölder rough path.

If $\mathbf{X}_{s,t}$ is a rough path with finite $1/\beta$ -variation, setting

$$\omega(s, t) = \max \left(\|X\|_{1/\beta\text{-var}, [s, t]}^{1/\beta}, \|\mathbb{X}\|_{1/(2\beta)\text{-var}, [s, t]}^{1/(2\beta)} \right), \text{ we have}$$

$$\max(\|X\|_{\beta}, \|\mathbb{X}\|_{2\beta}) \leq 1.$$

p -variation norm, ω -Hölder norm

$$\|w\|_{\infty-var,[s,t]} = \max_{s \leq u \leq v \leq t} |w_{u,v}|,$$

$$\|w\|_{p-var,[s,t]} = \left\{ \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^N |w_{t_{k-1}, t_k}|^p \right\}^{1/p},$$

Let $\omega(s, t)$ be a control function. For $0 < \theta \leq 1, q \geq 1$, $0 \leq s \leq t \leq T$ and a continuous path w , we define

$$\|w\|_{\theta,[s,t]} = \inf \left\{ C > 0 \mid |w_{u,v}| \leq C \omega(u, v)^\theta, s \leq u \leq v \leq t \right\},$$

$$\|w\|_{q-var, \theta, [s,t]} = \inf \left\{ C > 0 \mid \|w\|_{q-var, [u,v]} \leq C \omega(u, v)^\theta, s \leq u \leq v \leq t \right\}.$$

q -variation norm が ω -Hölder 連続な空間

For two parameter function $F_{s,t}$ ($0 \leq s \leq t \leq T$), we define $\|F\|_{\theta,[s,t]}$ and $\|F\|_{q-var,\theta,[s,t]}$ similarly.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_\theta &= \left\{ w \in C([0, T] \rightarrow E) \mid \right. \\ &\quad \left. \|w\|_\theta := \|w\|_{\theta,[0,T]} < \infty \right\}, \\ \mathcal{V}_{q,\theta,T}(E) &= \left\{ w \in C([0, T] \rightarrow E) \mid \right. \\ &\quad \left. \|w\|_{q-var,\theta} := \|w\|_{q-var,\theta,[0,T]} < \infty \right\}.\end{aligned}$$

- $\mathcal{V}_\theta$ is a Banach space with the norm $|w_0| + \|w\|_\theta$.
- $\mathcal{V}_{q,\theta,T}(E)$ is a Banach space with the norm $|w_0| + \|w\|_{q-var,\theta}$.

- $\omega : 1/\beta$ -rough path $X_{s,t}$ の control function
 - $\omega(s, t) = |t - s|$ なら β -Hölder rough path,
 - $X_{s,t}$ が $1/\beta$ -variation 有限ならその $1/\beta$ -variation norm で ω を定義すると $1/\beta$ -variation norm が扱える.
 - $1/\beta < p < 3$ となる p を取ると $X_{s,t}$ は p -rough path.
- $\mathcal{V}_{q,\theta}(\mathbb{R}^d)$: 反射壁 RDE の解の有界変動項が属する空間
- $q > 1$ の場合を考えるのは, Schauder の不動点定理を適用するとき, コンパクトな部分集合を考える必要があるため.

Controlled path の空間 $\mathcal{D}_X^{2\theta}(\mathbb{R}^d)$

- $X_{s,t}$: $1/\beta$ -rough path on $\mathbb{R}^n$ with the control ω .
- $1/3 < \theta \leq \beta$.

$$\mathcal{D}_X^{2\theta}(\mathbb{R}^d)$$

$$= \left\{ (Z, Z') \in \mathcal{V}_\theta([0, T], \mathbb{R}^d) \times \mathcal{V}_\theta([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)) \mid \right. \\ \left. \|R^Z\|_{2\theta} < \infty, \right\}$$

where $R_{s,t}^Z = Z_t - Z_s - Z'_s X_{s,t}$. $\mathcal{D}_X^{2\theta}(\mathbb{R}^d)$ is a Banach space with the norm

$$\|(Z, Z')\|_{2\theta} = |Z_0| + |Z'_0| + \|Z'\|_\theta + \|R^Z\|_{2\theta}.$$

$Z'_t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ is called a Gubinelli derivative of Z with respect to X .

L に対する仮定

Let $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$. Let L be a mapping from $\mathcal{V}_\beta([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \mid w_0 = \xi)$ to $C([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \mid w_0 = \eta)$ and satisfy the following conditions.

- (1) (adaptedness) $(L(w)_s)_{0 \leq s \leq t}$ depends only on $(w_s)_{0 \leq s \leq t}$ for all $0 \leq t \leq T$.
- (2) $L : (\mathcal{V}_\beta, \|\cdot\|_{\infty-var}) \rightarrow (C([0, T]), \|\cdot\|_{\infty-var})$ is continuous.
- (3) There exists a non-decreasing positive continuous function F on $[0, \infty)$ such that

$$\|L(w)\|_{1-var, [s, t]} \leq F(\|w\|_{(1/\beta)-var, [s, t]}) \|w\|_{\infty-var, [s, t]} \\ 0 \leq s \leq t \leq T.$$

例

(1) 条件 (A), (B) を満たす領域 $D \subset \mathbb{R}^d$.

Skorohod 方程式の解写像 $L : w \mapsto \phi$

(2) Let $f = (f_1, \dots, f_d) \in \text{Lip}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ and define

$$L(w)_t = \left(\max_{0 \leq s \leq t} f_1(w_s), \dots, \max_{0 \leq s \leq t} f_d(w_s) \right). \quad (1)$$

主定理を

$$|X_{s,t}| \leq \omega(s, t)^\beta, \quad |\mathbb{X}_{s,t}| \leq \omega(s, t)^{2\beta}$$

の場合に述べる. これは例えば, $X_{s,t}$ が $1/\beta$ -variation 有限で, 以下の場合に相当する:

$$\omega(s, t) = \max \left(\|X\|_{1/\beta\text{-var}, [s, t]}^{1/\beta}, \|\mathbb{X}\|_{1/(2\beta)\text{-var}, [s, t]}^{1/(2\beta)} \right).$$

Lip^γ の定義

$\gamma = n + \theta$ (n : 非負整数, $0 < \theta \leq 1$) のとき,

$$\sigma \in \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$$



σ は C^n 級かつ $D^n \sigma$ は θ -Hölder 連続.

主定理

- $\sigma \in \text{Lip}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$ ($2 \leq 1/\beta < \gamma \leq 3$)
- $L : \mathcal{V}_\beta([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \mid w_0 = \xi) \rightarrow C([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \mid w_0 = \eta)$ は仮定を満たす

とする. このとき, 以下を満たす $(Z, Z') \in \mathcal{D}_X^{2\beta}(\mathbb{R}^d)$ が存在する.

$$Z_t = \xi + \int_0^t \sigma(Z_s, L(Z)_s) dX_s,$$

$$Z'_t = \sigma(Z_t, L(Z)_t),$$

$$|Z_{s,t}| + \|L(Z)\|_{1\text{-var},[s,t]} \leq C(1 + \omega(\mathbf{0}, t))\omega(s, t)^\beta,$$

$$|R_{s,t}^Z| \leq C(1 + \omega(\mathbf{0}, t))\omega(s, t)^{2\beta},$$

C は F, β, γ にのみ依存する定数.

注意

- 反射壁 RDE の場合、より強い条件

$$(H1) \quad \|L(w)\|_{1-var,[s,t]} \leq C\|w\|_{\infty-var,[s,t]} \quad (C \text{ は定数})$$

を仮定し, 同様な結果を示した. (H1) は次の条件があれば成立する (田中洋): D は凸かつ単位ベクトル l で次を満たすものがある:

$$\inf\{(l, n(x)) \mid n(x) \in N_x, x \in \partial D\} > 0.$$

- $L(w) \equiv 0$ のとき, これは通常の RDE. この場合, $\sigma \in \text{Lip}^{\gamma-1}$ の下, 解の存在・評価が Davie, Gubinelli により示されている. 我々の Z, R^Z に対する評価は彼らの $D = \mathbb{R}^d$ の時と同じ形になっている.
- $L(w)$ は有界変動である必要はない.

有界変動項の評価に対する注意

Proposition 2

Let $0 < \beta \leq 1$. Assume

$$\|L(w)\|_{1-var,[s,t]} \leq F(\|w\|_{(1/\beta)-var,[s,t]}) \|w\|_{\infty-var,[s,t]} \\ 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Then we have

$$\|L(w)\|_{1-var,[s,t]} \leq \tilde{F}(\|w\|_{1/\beta-var,[s,t]}) \|w\|_{\infty-var,[s,t]} \\ 0 \leq s \leq t \leq T,$$

$$\text{where } \tilde{F}(x) = \inf_{\varepsilon > 0} F(\varepsilon) \left\{ \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)^{1/\beta} + 1 \right\}.$$

積分の定義

$1/\beta < p < \gamma$ を満たす p を固定する. $\alpha, \tilde{\alpha}, q$ を

$$\frac{1}{3} < \alpha < \tilde{\alpha} < \beta, \quad \alpha p > 1, \quad 1 < q < \min\left(\frac{p}{p-1}, \frac{\beta}{\tilde{\alpha}}\right)$$

を満たす数とする. $L(Z)_t = \Phi_t$ とすると

$$\begin{aligned} Z_t &= \xi + \int_0^t \sigma(Z_s, \Phi_s) dX_s, \\ \Phi_t &= L\left(\xi + \int_0^\cdot \sigma(Z_s, \Phi_s) dX_s\right)_t. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_X^{2\alpha} \times \mathcal{V}_{q, \tilde{\alpha}}$ における写像の不動点として解を得る.

- $\sigma = \sigma(x, y)$ ($x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$),
- $D\sigma(x, y)[u, v] = D_1\sigma(x, y)u + D_2\sigma(x, y)v$,
 $u, v \in \mathbb{R}^d$.
- $Y_t = (Z_t, \Phi_t)$ とおく.

$$\Xi_{s,t} := \sigma(Y_s)X_{s,t} + (D_1\sigma)(Y_s)Z'_s\mathbb{X}_{s,t} \\ + (D_2\sigma)(Y_s) \int_s^t \Phi_{s,r} \otimes dX_r.$$

$$I((Z, Z'), \Phi)_{s,t} = \int_s^t \sigma(Z_u, \Phi_u) dX_u := \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{\mathcal{P}=\{t_i\}} \Xi_{t_{i-1}, t_i}.$$

収束および積分の評価

Lemma 3

Let $q, \tilde{\alpha}$ be positive numbers such that

$$q \geq 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1, \quad 0 < \tilde{\alpha} \leq 1.$$

Let $\Phi \in \mathcal{V}_{q, \tilde{\alpha}}(\mathbb{R}^d)$ and $X \in \mathcal{V}_\beta(\mathbb{R}^n)$. Then

$$\left| \int_s^t \Phi_{s,r} \otimes dX_r \right| \leq 2^\beta \zeta(\beta p)^{1/p} \|\Phi\|_{q\text{-var}, \tilde{\alpha}} \|X\|_\beta \omega(s, t)^{\beta + \tilde{\alpha}}.$$

$|X_{s,t}| \leq C\omega(s, t)^\beta \rightarrow X$ は $p - \varepsilon$ 変分有限 ($\beta p > 1$ ゆえ)
 $\rightarrow \Phi$ は q 次変分有限ゆえ, Young 積分として意味がつく

Let

$$(\delta\Xi)_{s,u,t} := \Xi_{s,t} - \Xi_{s,u} - \Xi_{u,t}.$$

If

$$\frac{1}{3} < \alpha < \tilde{\alpha} < \beta, \quad \alpha p > 1, \quad 1 < q < \frac{p}{p-1},$$

then

$$\begin{aligned} |(\delta\Xi)_{s,u,t}| &\leq CK_\sigma f\left(\|R^Z\|_{2\alpha}, \|Z'\|_\alpha, \|Z'\|_\infty, \|\Phi\|_{q-var, \tilde{\alpha}}\right) \\ &\quad \left(1 + \omega(s, t)^{1/2}\right) \omega(s, t)^{\beta + (\gamma-1)\alpha}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} K_\sigma &= \|D\sigma\|_{\gamma-2} + \|D\sigma\|_\infty, \\ f(x, y, z, w) &= x + y + \left(x^{\gamma-2} + z^{\gamma-2} + w^{\gamma-2}\right)(z + w). \end{aligned}$$

積分の評価

Lemma 4

次を仮定する:

- $(Z, Z') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}(\mathbb{R}^d)$ and $\Phi \in \mathcal{V}_{q, \tilde{\alpha}}(\mathbb{R}^d)$,
- $1/3 < \alpha < \tilde{\alpha} < \beta$, $\alpha p > 1$, $1 < q < p/(p-1)$

このとき,

$$|I((Z, Z'), \Phi)_{s,t}| \leq Kg \left(\|R^Z\|_{2\alpha}, \|Z'\|_{\alpha}, \|Z'\|_{\infty}, \|\Phi\|_{q-var, \tilde{\alpha}} \right) \\ (1 + \omega(0, t)^{1/2}) \omega(s, t)^{\beta}.$$

ここで K は $\|D\sigma\|_{\infty}, \|D\sigma\|_{\gamma-2}, \alpha, \beta, \gamma$ に依存する定数,
 $g(x, y, z, w) := f(x, y, z, w) + z + w$.

● Schauder の不動点定理

E をバナッハ空間, K を有界閉凸部分集合とする.

$\mathcal{M} : K \rightarrow K$ が連続かつ $\mathcal{M}(K)$ が相対コンパクトならば $\mathcal{M}$ の不動点が存在する.

$$E = \mathcal{D}_X^{2\alpha} \times \mathcal{V}_{q,\tilde{\alpha}},$$

$$\begin{aligned} \|((Z, Z'), \Phi)\| &= |Z_0| + |Z'_0| + \|Z'\|_{\alpha,[0,T']} \\ &+ \|R^Z\|_{2\alpha,[0,T']} + |\Phi_0| + \|\Phi\|_{q-var,\tilde{\alpha},[0,T']}. \quad 0 < T' \leq T. \end{aligned}$$

$$E_{\xi,\eta} = \left\{ ((Z, Z'), \Phi) \in E \mid Z_0 = \xi, Z'_0 = \sigma(\xi, \eta), \Phi_0 = \eta \right\}.$$

$$\begin{aligned} B_{\xi,\eta} = \left\{ ((Z, Z'), \Phi) \in E_{\xi,\eta} \mid \right. \\ \left. \|Z'\|_{\alpha,[0,T']} + \|R^Z\|_{\alpha,[0,T']} + \|\Phi\|_{q-var,\tilde{\alpha},[0,T']} \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

$$B_{\xi, \eta} = \left(\left(\xi + \sigma(\xi, \eta) X_{s,t}, \sigma(\xi, \eta) \right), \eta \right)$$

を中心とした E の半径 1 のボール

$$\begin{aligned} Z_t &= \xi + I((Z, Z'), \Phi)_t, \\ \Phi_t &= L(\xi + I((Z, Z'), \Phi)) \end{aligned}$$

の解を得るため, 写像

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : ((Z, Z'), \Phi) &(\in E_{\xi, \eta}) \\ &\mapsto \left((\xi + I((Z, Z'), \Phi), \sigma(Y)), L(\xi + I((Z, Z'), \Phi)) \right). \end{aligned}$$

を考える.

Lemma 5

$\frac{1}{3} < \alpha < \tilde{\alpha} < \beta$, $\alpha p > 1$, $1 < q < \min\left(\frac{p}{p-1}, \frac{\beta}{\tilde{\alpha}}\right)$
とする.

- ① $\mathcal{M}(E_{\xi,\eta}) \subset E_{\xi,\eta}$ であり, $\mathcal{M}$ は連続.
- ② T' は十分小さいとする. このとき, $\mathcal{M}(B_{\xi,\eta}) \subset B_{\xi,\eta}$ かつ $\mathcal{M}(B_{\xi,\eta})$ は相対コンパクト.

Schauder の不動点定理より, 解の存在がわかる. T' は ξ の取り方によらないため, $[0, T]$ での解の存在定理が示される (L も適当に定義し直す必要がある). 解の評価も積分の評価から示される.

Reflected rough differential equations

Theorem 6

Assume D satisfies conditions (A) and (B). Let $\sigma \in \text{Lip}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$ and $\xi \in \bar{D}$. Then there exists a controlled path $(Z, Z') \in \mathcal{D}_X^{2\beta}(\mathbb{R}^d)$ and $\Phi \in \mathcal{V}_{1,\beta}(\mathbb{R}^d)$ such that $Y_t = Z_t + \Phi_t$

$$Y_t = \xi + \int_0^t \sigma(Y_s) dX_s + \Phi_t,$$

$$\Phi_t = L \left(\xi + \int_0^\cdot \sigma(Y_s) dX_s \right)_t,$$

$$|Z_{s,t}| + \|\Phi\|_{1\text{-var},[s,t]} \leq C(1 + \omega(0, t))\omega(s, t)^\beta,$$

$$|R_{s,t}^Z| \leq C(1 + \omega(0, t))\omega(s, t)^{2\beta}.$$

- h をリブシッツパスとし, path-dependent ODE

$$Z_t = \xi + \int_0^t \sigma(Z_s, L(Z)_s) dh_s$$

を考える. $L : C([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d) \rightarrow C([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ がリブシッツならば, 一意解が存在する. しかし, 我々は L に対して, リブシッツ性を仮定していない.

- 以下, reflected RDE の解写像のリブシッツパス h における連続性とそのサポート定理への応用を説明する. 我々の path-dependent RDE の設定 (L に対する仮定) のもとで, h における解の一意性が成立しているときは, 同じ議論が可能である.

サポート定理への応用

- $X_{s,t}$: geometric β -Hölder rough path
($1/3 < \beta \leq 1/2$)

$$|X_{s,t}| \leq \|X\|_\beta (t-s)^\beta, \quad |\mathbb{X}_{s,t}| \leq \|\mathbb{X}\|_{2\beta} (t-s)^{2\beta}.$$

$X_{s,t}$ はリプシッツパスで定まる rough path の極限として得られるものである.

- $\mathcal{C}_g^\beta(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{R}^n$ 上の geometric β -Hölder rough path 全体の集合.
- $\|\mathbb{X}\|_\beta := \|X\|_\beta + \sqrt{\|\mathbb{X}\|_{2\beta}}$

- RRDE

$$Y_t = \xi + \int_0^t \sigma(Y_s) dX_s + \Phi_s \quad (*)$$

の解を $Y_t(\mathbf{X})$ と書く. D が (A), (B) を満たすとき, $\mathbf{X} = \mathbf{h}$ ($\mathbf{h}$ はリブシッツパス h で定まる smooth rough path $\mathbf{h}$) ならば一意に $Y_t(\mathbf{h})$ が定まる.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{h}_n - \mathbf{X}\|_\beta = 0$ のとき, $Y(h_n)_t, \Phi(h_n)_t$ の一様収束の位相での極限点全体は RRDE(*) の解であり, Main theorem の評価をもつ. 次の定理では, 各 $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_g^\beta(\mathbb{R}^n)$ に対してこの解を対応させる写像を考える.

Theorem 7

$0 < \beta' < \beta$ とする. $X(\in \mathcal{C}_g^\beta(\mathbb{R}^n)) \mapsto Y(X) \in \mathcal{V}_{\beta'}(\mathbb{R}^d)$ はすべての h (h はリブシッツパス) で連続である.

B_t を $\mathbb{R}^n$ 上のブラウン運動, $B_{s,t}$ を Brownian rough path とし, 反射壁 SDE on $D \subset \mathbb{R}^d$

$$Y_t = \xi + \int_0^t \sigma(Y_s) \circ dB_s + \Phi_t$$

を考える. $\sigma \in C_b^2$ とする.

Theorem 8

D は条件 (A), (B) を満たすとする. 任意の $\beta < 1/2$ について β -Hölder ノルムの位相に関して,

$$\text{Supp}(P^Y) = \overline{\{Y(h) \mid h \text{ はリプシッツパス}\}}^{\mathcal{V}_\beta}.$$

この定理はさらに付加的な条件の下、次の Wong-Zakai 定理を用いて, J. Ren and J. Wu により示された (Ann of Probab 2016). 彼らの手法は, 伊藤解析を用いた, A. Millet and M. Sanz-Solé の方法による.

Theorem 9 (A-Sasaki, A)

D は (A), (B) を満たすとする. $Y(B)$ を反射壁 SDE の一意的な強い解とする. B^n を B_t の dyadic polygonal approximation とする. 部分列 $\{n_k\}$ を適当に取り,

$$\Omega = \{B \mid \lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(B^{n_k}) - Y(B)\|_\beta = 0\}$$

と定めると $P(\Omega) = 1$.

この定理から $\text{Supp}(P^Y) \subset \text{右辺}$ がわかる.

$Y(B) := \lim_{k \rightarrow \infty} Y(B^{n_k})$, $B \in \Omega$ と定めるとこの $Y(B)$ は Theorem 7 の連続性を持つ写像の一つのバージョンである. $\mathbf{B}_{s,t}$ の分布のサポートは $\mathbf{h}$ の全体を含むので, 逆の包含関係がわかる.