2016年度　確率解析とその周辺

(Stochastic Analysis and Related Topics 2016)

予稿集

(Abstracts)

2016年11月9日(水) 14:00 〜 11月11日(金) 16:10

(Nov. 9 (Wed.) – Nov. 11 (Fri.), 2016)

九州大学（伊都キャンパス）ウェスト1号館Dブロック4階
IMI コンファレンスルーム(W1-D414 室)

(IMI Conference Room (W1-D-414), West Zone 1,
Ito campus, Kyushu University)

研究集会「確率解析とその周辺」

平成 28 年度科学研究費補助金基盤研究 (B) 課題番号 16H03938「無限次元解析の諸問題と確率解析の研究」(研究代表者：会田 茂樹), 平成 28 年度科学研究費補助金基盤研究 (B) 課題番号 15H03624「確率解析的手法によるマルコフ過程の研究と応用」(研究代表者：重川 一郎) の援助を受けて, 表記の研究集会を以下の要領で開催致しますのでご案内申し上げます。

日時： 2016 年 11 月 9 日（水）14:00 〜 11 月 11 日（金）16:10

場所： 九州大学（伊都キャンパス）ウェスト 1 号館 D ブロック 4 階
IMI コンファレンスルーム (W1-D414 室)
〒 819-0395 福岡市西区元岡 744 番地

ホームページ： `https://www.math.kyoto-u.ac.jp/probability/sympo/sa16/`

—プログラム—

11 月 9 日 (水)

14:00〜14:40　会田 茂樹 (Shigeki Aida)　(東北大学)
Rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms

14:50〜15:30　野場 啓 (Kei Noba)　(京都大学)
屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題

15:50〜16:50　稲浜 譲 (Yuzuru Inahama)　(九州大学)　[特別講演]
Hairer 理論/Gubinelli-Imkeller-Perkowski 理論による Φ^4 モデルへのアプローチの概説 (1)

17:00〜17:40　岡村 和樹 (Kazuki Okamura)　(京都大学)
Long time behavior of the volume of the Wiener sausage on Dirichlet spaces

11 月 10 日 (木)

10:00〜10:40　数見 哲也 (Tetsuya Kazumi)　(大阪府立大学)
非因果的な Wiener 汎関数の Ogawa 積分可能性

10:50〜11:30　星野 浄生 (Kiyoiki Hoshino)　(大阪府立大学)

非因果的な Wiener 汎関数の SFC による同定

11:40〜12:40　星野 壮登 (Masato Hoshino)　(東京大学)　[特別講演]

Hairer 理論/Gubinelli-Imkeller-Perkowski 理論による Φ^4 モデルへのアプローチの概説 (2)

12:40〜14:00　昼休み

14:00〜14:40　難波 隆弥 (Ryuya Namba)　(岡山大学)

Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs
(石渡 聡 氏 (山形大学), 河備 浩司 氏 (岡山大学) との共同研究)

14:50〜15:30　重川 一郎 (Ichiro Shigekawa)　(京都大学)

Kolmogorov 拡散過程のスペクトル

15:50〜16:50　伊東 恵一 (Keiichi R. Ito)　(立教大学)　[特別講演]

繰りこみ群 vs. 数理物理学の難問（ミレニアム問題）(1)

17:00〜17:40　山下 秀康 (Hideyasu Yamashita)　(愛知学院大学)

Smooth approximation of a Yang-Mills theory on $\mathbb{R}^2$: a rough path approach

11 月 11 日 (金)

10:00〜10:40　竹内 敦司 (Atsushi Takeuchi)　(大阪市立大学)

Malliavin calculus for conditional intensities of Hawkes processes

10:50〜11:30　田口 大 (Dai Taguchi)　(立命館大学)

On the Euler-Maruyama scheme for SDEs with discontinuous diffusion coefficient

11:40〜12:40　伊東 恵一 (Keiichi R. Ito)　(立教大学)　[特別講演]

繰りこみ群 vs. 数理物理学の難問（ミレニアム問題）(2)

12:40〜13:50　昼休み

13:50〜14:30　永沼 伸顕 (Nobuaki Naganuma)　(大阪大学)

Stochastic complex Ginzburg-Landau equation with space-time white noise
(星野 壮登 氏 (東京大学), 稲浜 譲 氏 (九州大学) との共同研究)

14:40〜15:20　星野 壮登 (Masato Hoshino)　(東京大学)

Global well-posedness of singular stochastic PDEs

15:30〜16:10　日野 正訓 (Masanori Hino)　(京都大学)

Integrated version of Varadhan's asymptotics for lower order perturbations of strong local Dirichlet forms

(松浦 浩平 氏 (東北大学) との共同研究)

世話人　重川 一郎（京都大学大学院理学研究科）
会田 茂樹（東北大学大学院理学研究科）
稲浜　譲　（九州大学大学院数理学研究院）
河備 浩司（岡山大学大学院自然科学研究科）
楠岡 誠一郎 (岡山大学異分野基礎科学研究所)

Rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms

Shigeki Aida
Tohoku University

Let E be a finite dimensional normed linear space. For a continuous path (w_t) $(0 \le t \le T)$ on E, we define for $[s,t] \subset [0,T]$,

$$\|w\|_{\infty-var,[s,t]} = \max_{s \le u \le v \le t} |w_{u,v}|, \tag{1}$$

$$\|w\|_{p-var,[s,t]} = \left\{ \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{N} |w_{t_{k-1},t_k}|^p \right\}^{1/p}, \tag{2}$$

where $\mathcal{P} = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ is a partition of the interval $[s,t]$ and $w_{u,v} = w_v - w_u$. When $[s,t] = [0,T]$, we may omit denoting $[0,T]$.

Let $\omega(s,t)$ $(0 \le s \le t \le T)$ be a control function. That is, $(s,t) \mapsto \omega(s,t) \in \mathbb{R}^+$ is a continuous function and $\omega(s,u) + \omega(u,t) \le \omega(s,t)$ $(0 \le s \le u \le t \le T)$ holds. We introduce mixed norms by using ω and p-variation norm. For $0 < \theta \le 1, q \ge 1$, $0 \le s \le t \le T$ and a continuous path w, we define

$$\|w\|_{\theta,[s,t]} = \inf \left\{ C > 0 \mid |w_{u,v}| \le C\omega(u,v)^\theta \quad s \le u \le v \le t \right\}, \tag{3}$$

$$\|w\|_{q-var,\theta,[s,t]} = \inf \left\{ C > 0 \;\middle|\; \|w\|_{q-var,[u,v]} \le C\omega(u,v)^\theta \quad s \le u \le v \le t \right\}. \tag{4}$$

When $\omega(s,t) = |t-s|$, $\|w\|_{\theta,[s,t]} < \infty$ is equivalent to that w_u $(s \le u \le t)$ is a Hölder continuous path with the exponent θ in usual sense. Hence we may say w is an ω-Hölder continuous path with the exponent θ ((ω,θ)-Hölder continuous path in short). For two parameter function $F_{s,t}$ $(0 \le s \le t \le T)$, we define $\|F\|_{\theta,[s,t]}$ and $\|F\|_{q-var,\theta,[s,t]}$ similarly.

Let $\mathcal{V}_{q,\theta,T}(E)$ denote the set of E-valued continuous paths of finite q-variation defined on $[0,T]$ satisfying $\|w\|_{q-var,\theta} := \|w\|_{q-var,\theta,[0,T]} < \infty$. Note that $\mathcal{V}_{q,\theta,T}(E)$ is a Banach space with the norm $|w_0| + \|w\|_{q-var,\theta}$. Obviously, any path $w \in \mathcal{V}_{q,\theta,T}$ satisfy $|w_{s,t}| \le \|w\|_{q,\theta}\omega(s,t)^\theta$.

We denote by $\mathcal{V}_\theta$ the set of ω-Hölder continuous paths w satisfying $\|w\|_\theta = \|w\|_{\theta,[0,T]} < \infty$. $\mathcal{V}_\theta$ is a Banach space with the norm $|w_0| + \|w\|_\theta$.

Let $1/3 < \beta \le 1/2$. Let $\mathbf{X}_{s,t} = (X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t})$ $(0 \le s \le t \le T)$ be a $1/\beta$-rough path on $\mathbb{R}^n$ with the control function ω. That is, $\mathbf{X}$ satisfies Chen's relation and the path regularity conditions,

$$|X_{s,t}| \le \|X\|_\beta \omega(s,t)^\beta, \quad |\mathbb{X}_{s,t}| \le \|\mathbb{X}\|_{2\beta}\omega(s,t)^{2\beta}, \qquad 0 \le s \le t \le T. \tag{5}$$

We denote by $\mathscr{C}^\beta(\mathbb{R}^n)$ the set of $1/\beta$-rough paths. When $\omega(s,t) = |t-s|$, $\mathbf{X}_{s,t}$ is a β-Hölder rough path. If $\mathbf{X}_{s,t}$ is a rough path with finite $1/\beta$-variation, setting $\omega(s,t) = \|X\|_{1/\beta-var,[s,t]}^{1/\beta} + \|\mathbb{X}\|_{2/\beta-var,[s,t]}^{2/\beta}$, we have $\|X\|_\beta = \|\mathbb{X}\|_{2\beta} = 1$.

Let us choose p and γ such that $2 \le 1/\beta < p < \gamma \le 3$. We use the following quantity,

$$\widetilde{\|\mathbf{X}\|_\beta} = \sum_{i=1}^{3} \|\mathbf{X}\|_\beta^i, \quad \|\mathbf{X}\|_\beta = \|X\|_\beta + \sqrt{\|\mathbb{X}\|_{2\beta}}. \tag{6}$$

We introduce a set of controlled paths $\mathscr{D}_X^{2\theta}(\mathbb{R}^d)$ of $\mathbf{X}_{s,t}$, where $1/3 < \theta \le \beta$. A pair of ω-Hölder continuous paths $(Z, Z') \in \mathcal{V}_\theta([0,T], \mathbb{R}^d) \times \mathcal{V}_\theta([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$ with the exponent θ is called a controlled path of X, if the remainder term $R^Z_{s,t} = Z_t - Z_s - Z'_s X_{s,t}$ satisfies $\|R^Z\|_{2\theta} < \infty$. The set of controlled paths $\mathscr{D}_X^{2\theta}(\mathbb{R}^d)$ is a Banach space with the norm

$$\|(Z, Z')\|_{2\theta} = |Z_0| + |Z'_0| + \|Z'\|_\theta + \|R^Z\|_{2\theta} \quad (Z, Z') \in \mathscr{D}_X^{2\theta}(\mathbb{R}^d) \tag{7}$$

$Z'_t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ is called a Gubinelli derivative of Z with respect to X.

The rough differential equation which we will study contains path dependent bounded variation term $L(w)_t$. We consider the following condition on L.

Assumption 1. *Let $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$. Let L be a mapping from $\mathcal{V}_\beta([0,T] \to \mathbb{R}^d \mid w_0 = \xi)$ to $C([0,T] \to \mathbb{R}^d \mid w_0 = \eta)$ and satisfy the following conditions.*

(1) *(adaptedness) $(L(w)_s)_{0 \le s \le t}$ depends only on $(w_s)_{0 \le s \le t}$ for all $0 \le t \le T$.*

(2) *$L : \big(\mathcal{V}_\beta, \|\cdot\|_{\beta'}\big) \to (C([0,T]), \|\cdot\|_{\infty-var})$ is continuous for some $\beta' < \beta$.*

(3) *There exists a non-decreasing positive continuous function F on $[0, \infty)$ such that*

$$\|L(w)\|_{1-var,[s,t]} \le F(\|w\|_{(1/\beta)-var,[s,t]}) \|w\|_{\infty-var,[s,t]}. \tag{8}$$

We now state our main theorem. Note that we need to give the precise meaning of the integral below. We will do so in the talk.

Theorem 2. *Let $\sigma \in \mathrm{Lip}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$ and $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$. Assume that the mapping $L : \mathcal{V}_\beta([0,T] \to \mathbb{R}^d \mid w_0 = \xi) \to C([0,T] \to \mathbb{R}^d \mid w_0 = \eta)$ satisfies the condition in Assumption 1. Then there exists a controlled path $(Z, Z') \in \mathscr{D}_X^{2\beta}(\mathbb{R}^d)$ such that*

$$Z_t = \xi + \int_0^t \sigma(Z_s, L(Z)_s) d\mathbf{X}_s, \tag{9}$$

$$Z'_t = \sigma(Z_t, L(Z)_t) \tag{10}$$

Further there exist positive constants κ, C_1, C_2, C_3 which depend only on σ, β, p, γ such that

$$\begin{aligned} &\|Z\|_\beta + \|R^Z\|_{2\beta} + \|L(Z)\|_{1-var,\beta} \\ &\le C_1 \Big\{ 1 + \Big(1 + F(C_2 \widetilde{\|\mathbf{X}\|_\beta})\Big)^\kappa \Big(1 + \widetilde{\|\mathbf{X}\|_\beta}\Big)^\kappa \omega(0,T) \Big\} \Big(1 + F(C_3 \widetilde{\|\mathbf{X}\|_\beta})\Big) \widetilde{\|\mathbf{X}\|_\beta}. \end{aligned} \tag{11}$$

Remark 3 (Reflected rough differential equations)**.** This theorem implies the existence of solutions of reflected rough differential equations under the famous conditions (A) and (B) of the boundary. This is an extension of the speaker's result in SPA 125 (2015). Note that a stronger condition (H1) was imposed on the boundary in the previous paper. We do not need such a condition in this new approach.

J. Ren and J. Wu (Ann. Probab. 44 (2016)) proved a support theorem for reflected diffusions under the conditions (A), (B) and (C) by using the Wong-Zakai type theorem (A-Sasaki, SPA 123, 2013). We can give another proof of the support theorem by using the above theorem and the Wong-Zakai type theorem under the conditions (A) and (B).

屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題

野場 啓 (京都大学大学院理学研究科)

1　序

実数値の確率過程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ がある区間から脱出する時刻の分布を特徴づける問題を X に対する脱出問題という．ここでは, 二つの実数 $a > b$ と非負実数 $q \geq 0$, X の通過時刻 $\tau_a^+ = \inf\{t > 0 : X_t > a\}$, $\tau_b^- = \inf\{t > 0 : X_t < b\}$ に対し, 期待値 $\mathbb{E}_0^X\left(e^{-q\tau_a^+}1_{(\tau_a^+ < \tau_b^-)}\right)$ を求める問題を考える.

X を spectrally negative な Lévy 過程としたとき, X に対する脱出問題はスケール関数を用いて表すことができる．スケール関数は, X の Laplace 指数を用いて Laplace 変換により定義される．また, 脱出問題の応用として, ポテンシャル測度をスケール関数を用いて表すことができる.

Kyprianou and Loeffen [2] は, 屈折 Lévy 過程 U に対する脱出問題を論じた．彼らの屈折 Lévy 過程 U は, 値 0 を超えるまでは spectrally negative な Lévy 過程 X に従って動き, 0 を超えたときに下向きにドリフト α がかかる．詳しく言うと, spectrally negative な Lévy 過程 X に対し, 屈折 Lévy 過程 $U = \{U_t : t \geq 0\}$ は, 確率微分方程式

$$U_t - U_0 = X_t - \alpha \int_0^t 1_{\{U_s > 0\}} ds, \quad t \geq 0 \tag{1.1}$$

の解として定義される.

本講演では [3] に基づき, まず Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程を一般化した確率過程, つまり X, Y を異なる spectrally negative な Lévy 過程として, 正の値をとるときは X の挙動を, 負の値をとるときは Y の挙動をする確率過程 U を定義する．詳しく述べると, 確率過程 U を, X が有界変動な標本路を持つときは X と Y を独立として, 確率微分方程式

$$U_t - U_0 = \int_{(0,t]} 1_{\{U_{s-} \geq 0\}} dX_s + \int_{(0,t]} 1_{\{U_{s-} < 0\}} dY_s, \tag{1.2}$$

の解として定義する．また, X が非有界変動な標本路をもち Gaussian part を持たないときは停止過程の法則 $\mathbb{P}_x^{U^0}$ と周遊測度 n^U を任意の正可測汎関数 F に対し

$$\mathbb{P}_x^{U^0}\Big(F\Big((U_t)_{t<\tau_0^-}, (U_{t+\tau_0^-})_{t\geq 0}\Big)\Big) = \mathbb{P}_x^X\left(\mathbb{E}_y^{Y^0}\big(F\big(w, (Y_t^0)_{t\geq 0}\big)\big)\Big|_{\substack{y=X(\tau_0^-)\\ w=(X(t))_{t<\tau_0^-}}}\right) \quad x \neq 0 \tag{1.3}$$

$$n^U\Big(F\Big((U_t)_{t<\tau_0^-}, (U_{t+\tau_0^-})_{t\geq 0}\Big)\Big) = n^X\left(\mathbb{E}_y^{Y^0}\big(F\big(w, (Y_t^0)_{t\geq 0}\big)\big)\Big|_{\substack{y=X(\tau_0^-)\\ w=(X(t))_{t<\tau_0^-}}}\right) \tag{1.4}$$

を満たすものとして定義し, 上記のような確率過程 U を周遊理論を用いて構成する．ただし, Y^0 は Y の 0 での停止過程を, n^X は X の 0 での周遊測度を表す．さらに, 本講演では複合 Poisson 過程による近似と脱出問題, ポテンシャル測度について考察する.

2 Spectrally negative な Lévy 過程の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度

この節では, 主結果を述べるのに必要な記号と Spectrally negative な Lévy 過程に関する先行研究をまとめる. 主結果は講演において述べる. $X = \{X_t : t \geq 0\}$ を spectrally negative な Lévy 過程で, $-X$ が subordinator ではないものとする. X の Laplace 指数を

$$\psi_X(\lambda) := \log \mathbb{E}_0^X(e^{\lambda X_1}), \qquad \lambda \geq 0 \tag{2.1}$$

で定義する. またその逆関数を

$$\Phi_X(\theta) = \inf\{\lambda \geq 0 : \psi_X(\lambda) = \theta\}, \qquad \theta \geq 0 \tag{2.2}$$

で定義する. 任意の非負実数 $q \geq 0$ に対し, q-スケール関数 $W_X^{(q)} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を, $(-\infty, 0)$ 上では $W_X^{(q)} = 0$ であり, $[0, \infty)$ 上では連続で, Laplace 変換が

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W_X^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi_X(\beta) - q}, \qquad \beta > \Phi(q) \tag{2.3}$$

を満たす関数として定義する.

定理 2.1 (X に対する脱出問題)**.** $a \geq x > 0$ と $q \geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}_x^X \left(e^{-q\tau_a^+} 1_{(\tau_a^+ < \tau_0^-)} \right) = \frac{W_X^{(q)}(x)}{W_X^{(q)}(a)} \tag{2.4}$$

が成り立つ.

定理 2.2 (消滅過程のポテンシャル測度)**.** $a \geq x > 0$ と $q \geq 0$ および Borel 集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し,

$$\int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}_x^X(X_t \in A, \tau_a^+ \wedge \tau_0^- > t) dt = \int_A \left(\frac{W_X^{(q)}(x) W_X^{(q)}(a-y)}{W_X^{(q)}(a)} - W_X^{(q)}(x-y) \right) dy \tag{2.5}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] A. E. Kyprianou. Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Introductory lectures. Second edition. Universitext. Springer, Heidelberg, 2014. xviii+455 pp.

[2] A. E. Kyprianou and R. L. Loeffen. Refracted Lévy processes. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 46 (2010), no. 1, 24–44.

[3] K. Noba and K. Yano Generalized refracted Lévy process and its application to exit problem. arXiv:1608.05359, August 2016.

Hairer 理論/Gubinelli-Imkeller-Perkowski 理論による Φ^4_3 模型へのアプローチの概説 I

稲浜　譲　（九州大学数理学研究院）

The 3D dynamic Φ^4-model driven by space-time white noise
Let us study the following real-valued stochastic PDE on $(0,\infty)\times\mathbf{T}^3$, where ξ is the space-time white noise on $\mathbf{R}\times\mathbf{T}^3$ associated with $L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{T}^3, dtdx)$ ($\mathbf{T}:=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$);

$$\partial_t u = \triangle_x u - u^3 + \xi \qquad \text{with } u(0,\cdot\,)=u_0. \tag{1}$$

This is also called *the stochastic quantization equation* and physically very important, but was formerly ill-defined. We consider (generalized) *mild solutions* of this SPDE.

If the nonlinear term u^3 is absent, then the solution is the Ornstein-Uhlenbeck process, whose regularity at a fixed time is $(-1/2)^-$, i.e., $-1/2-\delta$ $(\forall\delta>0)$. One can naturally guess that the regularity of u_t, if it exists, is probably the same at best. It means that u_t is not a function, but merely a distribution and multiplication like u^3 cannot be defined. Therefore, this equation was not solved. More precisely, it was not even well-defined.

First, Hairer solved it a few years ago in his Fields medal awarded paper and soon after that two other methods appeared.

- Hairer's theory of regularity structures [6],
- Gubinelli-Imkeller-Perkowski's paracontrolled calculus, also known as theory of paracontrolled disributions [5],
- Kupiainen's theory based on renormalization group theory [7]. [1]

In this series of two survey talks we discuss recent developments of this stochastic PDE. In the first talk by Y. Inahama, we solve this SPDE via Gubinelli-Imkeller-Perkowski's method. In the second talk by M. Hoshino, we solve this SPDE via Hairer's method. We remark that both theories are descendants of Gubinelli's version of rough path theory.

[1]Nobody in Japan seems to take notice of it. I hope young (or old) folks who are familiar with renormalization groups would take a look at it.

Gubinelli's version of rough path theory

Rough path theory was invented by T. Lyons, but there are now some versions of it.

- Lyons' original rough path theory [8, 10, 9, 3],
- Gubinelli's controlled path theory [4, 2],
- Lyons-Yang's new theory [11], [2] which has no name yet.

The singular SPDE theories we discuss here emerged from the second one, so one must understand or recall it first. In rough path theory, functions (i.e., paths) are defined on a one-dimensional set like $[0, T]$ and the regularity is measured by the Hölder exponents.

Let x be an $\mathbf{R}^d$-valued α-Hölder continuous path. When $\alpha \le 1/2$, an $\mathbf{R}^n$-valued controlled ODE like

$$y_t = y_0 + \int_0^t \sigma(y_s) dx_s$$

does not make sense. Here, σ is a nice function that takes values in the set of $n \times d$-matrices. The reason is heuristically as follows. y is given by a (indefinite) line integral along x, so its regularity is probably the same as that of x, namely α. So is the regularity of $\sigma(y)$. However, $\int \sigma(y)dx$ cannot be defined since the sum of the regulairty of the two path x and $\sigma(y)$ does not satisfy $\alpha + \alpha > 1$, which is the condition for Young integral to hold.

To make sense of such a controlled ODE when $1/3 < \alpha \le 1/2$, a rough path is introduced. It is of the form $(X^1_{s,t}, X^2_{s,t})_{0 \le s \le t \le T}$ with $X^1_{s,t} = x_t - x_s$ with an algebraic constraint called K. T. Chen's identity. The first level path X^1 is essentially the same as x, so some new information, that is X^2, is added to x so that the line integral could be defined. [3]

For each given rough path $X = (X^1, X^2)$, Gubinelli introduced a Banach space of controlled paths. Simply put, a path is controlled by X if its local behavior is similar to (or better than) that of $x = [t \mapsto X^1_{0,t}]$. Therefore, the spaces of controlled paths may be different for different rough paths. [4] The key point of Gubinelli's theory loosely states that if y is controlled by X, then

[2]The authors seem confident, but nobody seems to take notice. I hope young (or old) folks who are familiar with rough paths would take a look at it.

[3]To make something impossible possible, new information must be added.

[4]This is important.

so are $\sigma(y)$ and the line integral $\int \sigma(y)dx$. Not only the line integral can be defined, but it also satisfies reasonable estimates. As a result, a solution of the controlled ODE above is understood as a fixed point of this integration map in the Banach space of controlled paths with respect to X. The solution map (also know as the Lyons-Itô map) is continuous in X and y_0. So far, everything was deterministic and no probability measure was involved.

When we think of applications of rough paths to SDEs like

$$y_t = y_0 + \int_0^t \sigma(y_s) \circ dw_s \qquad \text{(Stratonovich)},$$

probability theory comes in, but *only in the lifting (enhancing)* procedure. Here, (w_t) is the standard d-dimensional Brownian motion. To use rough path theory, we need W^2. A measurable map $w \mapsto (W^1, W^2)$ with the projection onto the first component being the identity is called *a lift or an enhancement* of w. This part cannot be made deterministic. It is not unique, but a canonical choice is $W^{2,ij}_{s,t} = \int_s^t (w^i_u - w^i_s) \circ dw^j_u$. This is called Brownian rough path. If we put it in the Lyons-Itô map, then we get a unique solution of the SDE above (as an image of a continuous map).

To sum up, the rough story of rough path theory is as follows: At the beginning we have the Wiener measure (or Brownian motion) and the usual path space which the Wiener measure lives on (or sample paths of Brownian motion live in). Then;

- Paths in the usual sense are given additional information in a deterministic way (i.e., lift or enhancement). [the deterministic part 1]
- For each lifted object (i.e., rough path), Banach spaces of controlled paths are defiend so that the integral equation under consideration makes sense. A solutions is a fixed point in such a Banach spaces. [the deterministic part 2].
- Brownian motion admits a lift a.s. [the probabilistic part].

In the deterministic parts, the new integration theory of course extends existing ones.

Dynamic Φ^4_3-model via paracontrolled calculus

Paracontrolled calculus was invented in [5]. It was applied to the dynamic Φ^4_3-model by Catellier-Chouk [1]. Unlike the theory of regularity structure, paracontrolled calculus has been gradually improved by many people. Consequently, there is no canonical version.

First we rewrite the dyamanic Φ^4_3-model in the mild form. Let $\triangle$ be the Laplacian on $\mathbf{T}^3$ and $P_t = e^{t\triangle}$ be the corresponding semigroup. For a function (or distribution) $u(t,x)$ defined on $(0,\infty)\times\mathbf{T}^3$, set $I(u)_t = \int_0^t e^{(t-s)\triangle}u_s ds$ (the space-time convolution with the heat kernel). Then, the equation (1) is understood in the mild sense as follows:

$$u_t = P_t u_0 - I(u^3)_t + X_t. \qquad (2)$$

Here, $X = I(\xi)$ is the Ornstein-Uhlenbeck process and solves the linearized equation: $\partial_t X_t = \triangle_x X + \xi$. *This Gaussian process X plays the role of Brownian motion in rough path theory.*

For each fixed $t > 0$, the (space) regularity of X_t is $(-1/2)^-$ in the Besov-Hölder sense. One can naturally guess that the regularity of u_t would not be better that that of X_t. Hence, u_t is not a function, but a distribution. This causes a serious trouble since the nonlinear term u_t^3 cannot be defined in the usual sense. (On the other hand, I works for any distribution-valued path fortunately, even if its regularity is very bad).

So, the key question to ask is which kind of information should be added to the "sample path" of X in a deterministic way so that the right hand side of the equation (in particular, u^3) makes sense.

A slightly lengthy, but not very difficult heuristic observation tells us that a possible answer is

$$\bigl(X,\ X^2,\ I(X^2),\ I(X^3),\ I(X^3)\circ X,\ I(X^2)\circ X^2,\ I(X^3)\circ X^2\bigr) \qquad (3)$$

with a constraint $(\partial_t - \triangle)I(X^2) = X^2$. This is called a *driver* of Eq. (1). Here, $\circ$ is the resonant term in the *paraproduct theory*, which is similar to the usual multiplication, but its regularity slightly better if it exists. (The resonant term $f\circ g$ exists if and only if the usual multiplication fg exists). As you can easily guess, a driver plays the role of a rough path.

Important remark The symbol X is used in *two senses* in this abstract: X, X^2, $I(X^2)$ etc. in (3) are just coordinates of a generic element of

$$C\bigl([0,T]\to \mathcal{C}^{-1/2-\kappa}\times\mathcal{C}^{-1-\kappa}\times\mathcal{C}^{1-\kappa}\times\mathcal{C}^{1/2-\kappa}\times\mathcal{C}^{-\kappa}\times\mathcal{C}^{-\kappa}\times\mathcal{C}^{-1/2-\kappa}\bigr)$$

$(0<\kappa\ll 1)$. Here, $\mathcal{C}^\alpha = \mathcal{B}^\alpha_{\infty,\infty}$ stands for the Besov-Hölder space of regularity $\alpha\in\mathbf{R}$. Therefore, X^2 may not mean $X\times X$ in (3) for example. The space of drivers is the closed subset of the above path space with the constraint $(\partial_t - \triangle)I(X^2) = X^2$, which should be understood in the mild senses.

For a given $(X, X^2, \ldots, I(X^3) \circ X^2)$ as in (3), we can actually define Banach spaces of *paracontrolled distributions*. This plays the role of Banach spaces of controlled paths in rough path theory. Besov spaces and paraproducts are used here in an essential way. The right hand side of Eq. (2) makes sense for a paracontrolled distribution u controlled by the driver $(X, X^2, \ldots)$. Loosely speaking, $v = v(t, x)$ is controlled by the driver $(X, X^2, \ldots)$ if there exist $F \in C([0, T] \to \mathcal{C}^{1/2-\kappa})$ and $G \in C([0, T] \to \mathcal{C}^{3/2-\kappa})$ such that

$$v_t = I(X^3)_t + F_t \lhd I(X^2)_t + G_t. \tag{4}$$

Here, $\lhd$ stands for the *paraproduct* of F_t and $I(X^2)_t$.

A rough and heauristic meaning of (4) is as follows: v_t is of regualrity $(1/2)^-$. The first (i.e., coarsest) approximation of v_t is given by $I(X^3)_t$ whose regualrity is $(1/2)^-$, too. The difference $v_t - I(X^3)_t$ is of better regualrity 1^-. This difference should behave like $I(X^2)_t$ in small scales. (Note that small scale behavior of $F_t \lhd I(X^2)_t$ is similar to that of $I(X^2)_t$.) If $F_t \lhd I(X^2)_t$ is subtracted from $v_t - I(X^3)_t$, then regualrity is $(3/2)^-$. In other words, $v_t - I(X^3)_t$ is allowed to have a bad term (a term of regularity less than $(3/2)^-$) only if it behaves like $I(X^2)_t$. If a term of $v_t - I(X^3)_t$ does not look like $I(X^2)_t$, then it must have better regularity $(3/2)^-$.

A solution of Eq. (2) is defined to be a fixed point in an appropriate space of paracontrolled distribution. Under mild assumptions, well-posedness of time-local solution can be proven. This is the determistic part of this theory.

Of course, this extends the existing theory. Suppose that X is very nice, for example, X is a deterministic element in $C([0, T] \to \mathcal{C}^\alpha)$ for some $\alpha > 0$. In this case, we can choose $\big(X, X^2, \ldots, I(X^3) \circ X^2\big)$ in *the literal sense* (namely, $X^2 := X \times X$, etc.). Then, a unique solution of the new extended equation coincides with the one in the usual sense.

Next we discuss the probabilistic part of the theory, that is, enhancement of the Ornstein-Uhlenbeck process. This part becomes much more complicated than the corresponding part in rough path theory since we need to do some kind of *renormalization*.

Let $X = I(\xi)$ be an Ornstein-Uhlenbeck process again. Since we cannot enhance X directly, we consider a mollified noise X^ε at first. (High frequencies are killed. As $\varepsilon \searrow 0$, $X^\varepsilon \to X$ in an appropriate sense). Since sample paths of X^ε are very nice, we can do the "literal enhancement" of X^ε as above. Unfortunately, however, $\bigl(X^\varepsilon, (X^\varepsilon)^2, \ldots, I((X^\varepsilon)^3 \circ (X^\varepsilon)^2)\bigr)$ does not converge! Hence, we cannot get a decent object in this way.

Observe that each component of the above enhanced noise belongs to an inhomogeneous Wiener chaos (at least for fixed ε, t and x). Fortunately, the top order terms of the Wiener chaos expansion are all convergent, though some lower order terms diverge. So, we can throw away these diverging terms in a systematic way by using Wiener chaos theory to get a meaningful limiting object on the space of drivers.

In this way we get a kind of SPDE driven by this limiting object. This procedure is called *renomalization*. However, we have to pay a price for the renomalization. The original form of SPDE is lost. We prefer convergence of the enhanced noise to keeping the original form of the SPDE.

More precisely, there exists diverging real constants c_1^ε and c_2^ε (independent of t and x) such that

$$\Bigl(X^\varepsilon,\ (X^\varepsilon)^2 - c_1^\varepsilon,\ I((X^\varepsilon)^2 - c_1^\varepsilon),\ I((X^\varepsilon)^3 - c_1^\varepsilon X^\varepsilon),\ I((X^\varepsilon)^3 - c_1^\varepsilon X^\varepsilon) \circ X^\varepsilon,$$
$$I((X^\varepsilon)^2 - c_1^\varepsilon) \circ ((X^\varepsilon)^2 - c_1^\varepsilon) - c_2^\varepsilon,\ I((X^\varepsilon)^3 - c_1^\varepsilon X^\varepsilon) \circ ((X^\varepsilon)^2 - c_1^\varepsilon) - c_2^\varepsilon X^\varepsilon\Bigr)$$

converges in the space of drivers. The limit is denoted by

$$\Bigl(X^\infty, (X^\infty)^2, \ldots, I((X^\infty)^3) \circ (X^\infty)^2\Bigr).$$

Therefore, we get a generalized (S)PDE driven by the above random drivers.

However, since the noise is deformed, it is not clear what this new (S)PDE looks like. In this case, fortunately, it is not so hard see that a unique solution of the new generalized (S)PDE driven by the deformed noise $(X^\varepsilon, (X^\varepsilon)^2 - c_1^\varepsilon, \ldots)$ solves the following (S)PDE in the usual sense:

$$\partial_t u^\varepsilon = \triangle_x u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + (3c_1^\varepsilon + 9c_2^\varepsilon)u^\varepsilon + \xi^\varepsilon, \qquad \text{with } u^\varepsilon(0,\,\cdot\,) = u_0.$$

Observe that the first order term $(3c_1^\varepsilon + 9c_2^\varepsilon)u^\varepsilon$ appeared due to the renormalization.

In summary, we have the following result. *If the initial value u_0 is not so bad, then there exists a random time $T_* > 0$ such that u^ε converges to a certain limit u^∞ on the time interval $[0, T_*)$ in an appropriate Banach space of paracontrolled distributions.*

Some remarks are in order. (i) The limit u^∞ may not solve any (S)PDE in the usual sense. But, it certainly is a solution of the new generalized (S)PDE driven by a random driver $(X^\infty, (X^\infty)^2, \ldots)$. So, it is not very strange to call it a solution of an SPDE.

(ii) In their recent work, Mourrat and Weber [12] proved this equation in fact has a time-global solution for any driver in a deterministic sense. (In my view, this could be a breakthrough.) Moreover, their method is new. Without defining the spaces of paracontrolled distributions, they directly decompose Eq. (1) into a system of two PDEs, the first one of which is a linear equation involving the paraproduct with respect to $I(X^2)$.

References

[1] Catellier, R.; Chouk, K.; Paracontrolled distributions and the 3-dimensional stochastic quantization equation. arXiv:1310.6869.

[2] Friz, P.; Hairer, M.; A course on rough paths. With an introduction to regularity structures. Springer, 2014.

[3] Friz, P.; Victoir, N.; Multidimensional stochastic processes as rough paths. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[4] Gubinelli, M.; Controlling rough paths. J. Funct. Anal. 216 (2004), no. 1, 86–140.

[5] Gubinelli, M.; Imkeller, P.; Perkowski, N.; Paracontrolled distributions and singular PDEs. Forum Math. Pi 3 (2015), e6, 75 pp.

[6] Hairer, M.; A theory of regularity structures. Invent. Math. 198 (2014), no. 2, 269–504.

[7] Kupiainen, A.; Renormalization Group and Stochastic PDE's. arXiv:1410.3094.

[8] Lyons, T.; Differential equations driven by rough signals. Rev. Mat. Iberoamericana 14 (1998), no. 2, 215–310.

[9] Lyons, T.; Caruana, M.; Lévy, T.; Differential equations driven by rough paths. Lecture Notes in Math., 1908. Springer, Berlin, 2007.

[10] Lyons, T.; Qian, Z.; System control and rough paths. Oxford University Press, Oxford, 2002.

[11] Lyons, T.; Yang, D.; Integration of time-varying cocyclic one-forms against rough paths. arXiv:1408.2785.

[12] Mourrat, J. C.; Weber, H.; Global well-posedness of the dynamic Φ^4_3 model on the torus. arXiv:1601.01234.

Long time behavior of the volume of the Wiener sausage on Dirichlet spaces

Kazuki Okamura

In this talk, we consider the long time behavior of the volume of the Wiener sausage on Dirichlet spaces. Here the Wiener sausage $W_{t,\epsilon}$ is the ϵ-neighborhood of the trajectory of a process until time t. We focus on the volume of $W_{t,\epsilon}$, denoted by $V_{t,\epsilon}$, for diffusion process on metric measure space other than the Euclid space. We review known results. Chavel-Feldman [CF86-1, CF86-2, CF86-3] considered $V_{t,\epsilon}$ for Brownian motion on Riemannian manifolds. [CF86-1] shows radial asymptotic results (i.e. $\epsilon \to 0$) on hyperbolic 3-spaces, and a time asymptotic result on Riemannian symmetric spaces of non-positive curvature. [CF86-2] shows radial asymptotic results on complete Riemannian manifolds for the dimension $d \geq 3$. [CF86-3] shows a radial asymptotic result for the Wiener sausage of reflected Brownian motion on a domain in $\mathbb{R}^d, d \geq 2$. Sznitman [Sz89] obtained a time asymptotic result of negative exponentials of Brownian bridge on hyperbolic space, similar to Donsker-Varadhan [DV75]. Chavel-Feldman-Rosen [CFR91] obtained second order radial asymptotic result for 2-dimensional Riemannian manifold, extending Le Gall's expansion [Le88, Theorem 2.1] in $\mathbb{R}^2$. Recently, Gibson-Pivarski [GP15] obtained a time asymptotic result similar to [DV75] for diffusions on local Dirichlet spaces.

Our results are time asymptotics for the volume of the Wiener sausage on *non-symmetric* spaces. We adopt the framework by Barlow-Grigor'yan-Kumagai [BGK12]. First, we will give growth rate of the means on some spaces containing some fractal spaces such as infinite Sierpinski gaskets and carpets. Second, we will show that the exact growth rate of the means on "finitely modified" Euclidian spaces is identical with the one of the original Euclidian space. Third, we will give an example of a space on which the sequence of the means largely fluctuates. Some analogous results for a discrete framework, specifically, range of random walk on graphs, were obtained by [O14]. Difficulties are that we cannot use symmetries and scalings of spaces and processes. On the Euclid spaces, by Brownian scaling, time asymptotic results can be derived from radial asymptotic results. The time asymptotic results in [Sp64] and [CF86-1] uses such symmetries and scalings of spaces and processes.

References

[BGK12] M. T. Barlow, A. Grigor'yan and T. Kumagai, On the equivalence of parabolic Harnack inequalities and heat kernel estimates, *J. Math. Soc. Japan* 64 (2012) 1091-1146.

[CF86-1] I. Chavel and E. A. Feldman, The Wiener sausage and a theorem of Spitzer in Riemannian manifolds. *Probability theory and harmonic analysis (Cleveland, Ohio, 1983)*, 45-60, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 98, Dekker, New York, 1986.

[CF86-2] I. Chavel and E. A. Feldman, The Lenz shift and Wiener sausage in Riemannian manifolds. *Compositio Math.* 60 (1986), no. 1, 65-84.

[CF86-3] I. Chavel and E. A. Feldman, The Lenz shift and Wiener sausage in insulated domains. *From local times to global geometry, control and physics (Coventry, 1984/85)*, 47-67, Pitman Res. Notes Math. Ser., 150, Longman Sci. Tech., Harlow, 1986.

[CFR91] I. Chavel, E. A. Feldman and J. Rosen, Fluctuations of the Wiener sausage for surfaces. *Ann. Probab.* 19 (1991) 83-141.

[DV75] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Asymptotics for the Wiener sausage, *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975) 525-565.

[GP15] L. R. Gibson and M. Pivarski, The Rate of Decay of the Wiener Sausage in Local Dirichlet Space, *J. Theor. Probab.* 28 (2015) 1253 – 1270.

[Le88] J.-F. Le Gall, Fluctuation results for the Wiener sausage, *Ann. Probab.* 16 (1988) 991-1018.

[O14] K. Okamura, On the range of random walk on graphs satisfying a uniform condition, *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 11 (2014), no. 1, 341-357.

[Sp64] F. Spitzer, Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion, *Z. Wahr. Verw. Gebiete*, 3 (1964) 110-121.

[Sz89] A.-S. Sznitman, Lifschitz tail and Wiener sausage on hyperbolic space, *Comm. Pure Appl. Math.*, 42 (1989) 1033-1065.

非因果的なWiener汎関数のOgawa積分可能性

星野　浄生　(大阪府立大学)*1
数見　哲也　(大阪府立大学)*2

1.　序

通常確率解析では Brown 運動に関する確率積分を定義するために被積分関数は因果的, すなわち filtration に適合することを仮定する．一方因果的であるという条件は応用上制約となることがあり, 非因果的関数に対しても確率積分の概念を拡張する試みが行われてきた．このようなものの代表的なものとしては Skorokhod 積分 ([3]) と Ogawa 積分 ([1],[2]) があり, それぞれ因果的関数の Itô 積分と Stratonovich 対称積分の非因果的関数に対する拡張とみなせる．本講演では, Wiener chaos の枠組みで, 非因果的関数が Skorokhod 積分で表される場合に Ogawa 積分可能であるための十分条件と, この条件が満たされるときの Ogawa 積分の具体的表示を与える．

2.　設定

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $B : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ を Brown 運動 とし, Brown 運動を可測にする σ-field を $\mathcal{F}_B = \sigma(B_t \,|\, t \in [0,1])$ とする．以下, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_B, P)$ 上で考える．核関数 $k \in L^2[0,1]^n$ に対して $I_n(k)$ をその n 次の重複Wiener-Itô積分とする．また $k \in L^2[0,1]^0 = \mathbb{R}$ のとき $I_0(k) = k$ とする．$L^2_{\mathrm{sym}}[0,1]^n = \{f \in L^2[0,1]^n \,|\, f : \mathrm{symmetric}\}$, $L^2_{\mathrm{sym}}[0,1]^0 = \mathbb{R}$ とするとき, $L^2(\Omega)$ は次のように直交直和分解される:

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I_n(L^2_{\mathrm{sym}}[0,1]^n).$$

したがって $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ とすると, 任意の $f \in L^2([0,1]^i \times \Omega)$ は核関数 $k^f_n(t;\cdot) \in L^2_{\mathrm{sym}}[0,1]^n$ により次のように分解表示される:

$$f(t,\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k^f_n(t;\cdot)) \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad \text{a.a. } t \in [0,1]^i.$$

定義 1 (Sobolev 空間) $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ と $r \geq 0$ に対して Sobolev 空間 $\mathcal{L}^{r,2}_i$ を以下で定義する:

$$\mathcal{L}^{r,2}_i = \{f \in L^2([0,1]^i \times \Omega) \mid |f|^2_{i,r,2} := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^r n! |k^f_n(\cdot;\cdot)|^2_{L^2[0,1]^{i+r}} < \infty\}.$$

注) $\mathcal{L}^{r,2}_i$ はノルム $|\cdot|_{i,r,2}$ に関して Hilbert 空間であり, $\mathcal{L}^{0,2}_i = L^2([0,1]^i \times \Omega)$．また r に関して単調減少である: $r_1 < r_2 \Rightarrow \mathcal{L}^{r_1,2}_i \supset \mathcal{L}^{r_2,2}_i$.

定義 2 (Skorokhod 積分) $f \in \mathcal{L}^{1,2}_1$ とする．f の核関数による分解表示を $f(t,\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k^f_n(t;\cdot))$ とすると, $\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(k^f_n(\cdot;\cdot))$ は $L^2(\Omega)$ で収束する．この和を f の Skorokhod 積分といい, $\int_0^1 f(t)\,dB_t$ と表す．また $s \in [0,1]$ に対して $\int_0^s f(t)\,dB_t$ を $\int_0^1 1_{[0,s]}(t) f(t)\,dB_t$ で定義する．

*1 e-mail: `su301032@edu.osakafu-u.ac.jp`
*2 e-mail: `kazumi@las.osakafu-u.ac.jp`

定義 3 (微分作用素) $g \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ とする. g の核関数による分解表示を $g(s,\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k_n^g(s;\cdot))$ とすると, $\sum_{n=0}^{\infty} nI_{n-1}(k_n^g(s;\cdot,t))(\omega)$ は $L^2([0,1]^2 \times \Omega)$ で収束する. この和を $D_t g(s)$ と表す.

定義 4 (Ogawa積分) 可測関数 $f : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ は $\int_0^1 f(t)^2\,dt < \infty \quad$ a.s. を満たすとする.

- (φ-可積分性) $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を $L^2[0,1]$ の CONS とする.
  $\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f(t)\varphi_m(t)\,dt \int_0^1 \varphi_m(t)\,dB_t$ が確率収束するとき, f は φ-可積分であるという. そしてこの和を f の φ に関する Ogawa 積分といい, $\int_0^1 f(t)\,d_\varphi B_t$ と表す.

- (**u**-可積分性) $L^2[0,1]$ の任意の CONS $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ に関して f が φ-可積分であり, $\int_0^1 f(t)\,d_\varphi B_t$ が $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ に依存しないとき f は u-可積分であるという. そして $\int_0^1 f(t)\,d_\varphi B_t$ を f の Ogawa 積分といい, $\int_0^1 f(t)\,d_{\mathrm{u}} B_t$ と表す.

3. 主定理

以下では可測関数 $f : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ は $g \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ により $f(t,\omega) = (\int_0^t g\,dB)(\omega)$ と表され, $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ は有界変動とする. このとき fv の Ogawa 積分可能性に関して以下の定理が成り立つ.

定理 1 $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を $L^2[0,1]$ の CONS とし, $\tilde{\varphi}_m(t) = \int_0^t \varphi_m(s)\,ds$ とおく. g と $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ が

$$(1)\ g \in \mathcal{L}_1^{2,2} \qquad \text{かつ} \qquad (2)\ (\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ は正則} \quad \text{i.e.} \quad \sup_{M\in\mathbb{N}} \Big| \sum_{m=1}^{M} \varphi_m \tilde{\varphi}_m \Big|_{L^2[0,1]} < \infty$$

を満たすとする. このとき fv は φ-可積分であり, $\int_0^1 f(t)v(t)\,d_\varphi B_t$ は

$$\int_0^1 f(t)v(t)\,dB_t + \frac{1}{2}\int_0^1 g(t)v(t)\,dt + \int_0^1 \Big(\int_0^t D_t g(s)\,dB_s \Big) v(t)\,dt \qquad \cdots\cdots (*)$$

と一致する.

定理 2 g が

$$(1)\ g \in \mathcal{L}_1^{2,2} \qquad \text{かつ} \qquad (2)\ g(t,\omega) = (\textstyle\int_0^t h\,dB)(\omega),\ h \in \mathcal{L}_1^{1,2}$$

を満たすとする. このとき fv は u-可積分であり, $\int_0^1 f(t)v(t)\,d_{\mathrm{u}} B_t$ は定理 1 の $(*)$ と一致する.

注) (2) で $h \in \mathcal{L}_1^{3,2}$ であれば (1) は満たされる.

参考文献

[1] S. Ogawa, Quelques propriétés de l'intégrale stochastique du type noncausal. Japan J. Appl. Math. **1**, 405-416 (1984)

[2] S. Ogawa, The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals. Japan J. Appl. Math. **2**, 229-240 (1985)

[3] A.V. Skorokhod, On a generalization of a stochastic integral. Theory Probab. Appl. **20**, 219-233 (1975)

非因果的なWiener汎関数のSFCによる同定

星野　浄生　(大阪府立大学)[*1]
数見　哲也　(大阪府立大学)[*2]

1.　序

Random関数が, 確率Fourier係数(SFC)で同定されるか, という問題が[1]〜[4]で論じられてきた. [1]では, random関数が因果的(causal)な場合について論じられている. 一方, random関数が非因果的(noncausal)な場合について, [2]ではSkorokhod積分型のSFCでのrandom関数の同定について, [3]では[2]の拡張問題として random関数の確率微分の同定について, 結果がある. また [4]ではOgawa積分型のSFCでの同定についての結果がある. 本講演では, 2乗可積分 Wiener 汎関数空間において, 無条件にSkorokhod積分型のSFCで非因果的Wiener汎関数の確率微分の同定を行い, さらに本会講演「非因果的なWiener汎関数のOgawa積分可能性」の主定理を用いて, Ogawa積分型のSFCでの同定を導く.

2.　設定

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $B : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ をBrown運動 とし, Brown運動が生成するσ-fieldを$\mathcal{F}_B = \sigma(B_t \,|\, t \in [0,1])$ とする. また, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $L^2[0,1]$ のCONSで, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し e_n は有界であるとする. Skorokhod積分,Ogawa積分それぞれについてのSFCの定義を述べる.

注) Sobolev空間 $\mathcal{L}_i^{r,2}$, Skorokhod積分 $\int_0^1 \cdot\, dB_t$, Ogawa積分 $\int_0^1 \cdot\, d_\varphi B_t$, $\int_0^1 \cdot\, d_{\mathrm{u}} B_t$ の定義についてはそれぞれ,「非因果的なWiener汎関数のOgawa積分可能性」abstractの定義1,2,4を参照.

定義 1 (非因果的Wiener汎関数の確率微分のSFC-S) 確率空間$(\Omega, \mathcal{F}_B, P)$ 上で考える. $a \in \mathcal{L}_1^{1,2}$, $b \in \mathcal{L}_1^{0,2}$ とし,次のSkorokhod積分による確率微分を考える.

$$dX_t = a(t)\, dB_t + b(t)\, dt \qquad \text{すなわち,} \quad X_t = \int_0^t a(s)\, dB_s + \int_0^t b(s)\, ds \quad , t \in [0,1].$$

ここで, dX の $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関するn番目の確率Fourier係数(SFC-S) $\mathcal{F}_n(dX)$ を次で定義する.

$$\mathcal{F}_n(dX) = \int_0^1 e_n(t)\, dX_t := \int_0^1 a(t)e_n(t)\, dB_t + \int_0^1 b(t)e_n(t)\, dt.$$

特に, $b = 0$のとき, $\mathcal{F}_n(a\, dB)$ を a の $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関するn番目のSkorokhod型確率Fourier係数(SFC-S) ともいう.

可測関数 $a : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ は $\int_0^1 a(t)^2\, dt < \infty$ a.s.を満たすとし, 可測関数 $b : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ は $\int_0^1 |b(t)|\, dt < \infty$ a.s.を満たすとする. 任意の$n \in \mathbb{N}$に対し, ae_n はOgawa積分可能であるとする. ここで以下を定義する.

[*1] e-mail: `su301032@edu.osakafu-u.ac.jp`
[*2] e-mail: `kazumi@las.osakafu-u.ac.jp`

定義 2 (Random 関数の確率微分の SFC-O) (特定の CONS に関する, 或いは universal な)Ogawa 積分 $\int_0^1 \cdot\, d_* B_t$ による次の確率微分を考える.

$$dY_t = a(t)\, d_* B_t + b(t)\, dt \qquad \text{すなわち,} \quad Y_t = \int_0^t a(s)\, d_* B_s + \int_0^t b(s)\, ds \quad , t \in [0,1].$$

ここで, dY の $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関する n 番目の確率 Fourier 係数 (SFC-O$_*$) $\mathcal{F}_n(dY)$ を次で定義する.

$$\mathcal{F}_n(dY) = \int_0^1 e_n(t)\, dY_t := \int_0^1 a(t)e_n(t)\, d_* B_t + \int_0^1 b(t)e_n(t)\, dt.$$

特に, $b = 0$ のとき, $\mathcal{F}_n(a\, d_* B)$ を a の $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関する n 番目の Ogawa 型確率 Fourier 係数 (SFC-O$_*$) ともいう.

3. 主定理

以下, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_B, P)$ 上で考える.

定理 1 (非因果的 Wiener 汎関数の確率微分の SFC-S による同定) 確率微分 dX を $a \in \mathcal{L}_1^{1,2}$, $b \in \mathcal{L}_1^{0,2}$ を用いて以下で定める.

$$dX_t = a(t)\, dB_t + b(t)\, dt.$$

このとき, a, b は dX の $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関する SFC-S の系 $(\mathcal{F}_n(dX))_{n\in\mathbb{N}}$ を用いて表現できる.

「非因果的な Wiener 汎関数の Ogawa 積分可能性」の主定理を適用することで以下の定理を得る. 以下では, 可測関数 $a : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ は $g \in \mathcal{L}_1^{2,2}$ により $a(t,\omega) = (\int_0^t g\, dB)(\omega)$ と表されているとし, $b \in \mathcal{L}_1^{0,2}$ とし, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を有界変動関数列とする.

定理 2 (非因果的 Wiener 汎関数の確率微分の SFC-O による同定)

(1) $L^2[0,1]$ の CONS $\varphi = (\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は正則

(2) $\exists h \in \mathcal{L}_1^{1,2} \quad g(t,\omega) = (\int_0^t h\, dB)(\omega)$

のいずれかを満たすとする. このとき, 確率微分

$$dY = \begin{cases} a(t)\, d_\varphi B_t + b(t)\, dt & ,(1)\text{ のとき} \\ a(t)\, d_{\mathrm{u}} B_t + b(t)\, dt & ,(2)\text{ のとき} \end{cases}$$

の $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関する SFC-O$_*$ の系 $(\mathcal{F}_n(dY))_{n\in\mathbb{N}}$ が定義され, a, b は $(\mathcal{F}_n(dY))_{n\in\mathbb{N}}$ を用いて表現できる.

参考文献

[1] S. Ogawa, On a stochastic Fourier transformation. An International Journal of Probability and Stochastic Processes. Vol. 85. **2**, 286-294 (2013)

[2] S. Ogawa, H. Uemura, On a stochastic Fourier cofficient: case of noncausal functions. J.Theoret. Probab. **27**, 370-382 (2014)

[3] S. Ogawa, H. Uemura, Identification of a noncausal Itô process from the stochastic Fourier cofficients. Bull. Sci. Math. **138**, 147-163 (2014)

[4] S. Ogawa, H. Uemura, On the identification of noncausal functions from the SFCs. 数理解析研究所講究録. **1952**, 128-134 (2015-06)

Hairer 理論による Φ^4 モデルへのアプローチの概説

星野壮登 (東京大学)

Hairer 理論（正則性構造理論）の考え方を 3 次元トーラス上の Φ^4 モデル

$$\partial_t \varphi = \Delta\varphi - \varphi^3 + m\varphi + \xi, \quad \varphi(0,\cdot) = \varphi_0$$

を題材として概説する。出発点となるのは Gubinelli-Imkeller-Perkowski（GIP）理論と同様、Picard の逐次近似である。$\varphi^{(0)} = \varphi_0$ から始め、列 $\{\varphi^{(n)}\}$ を

$$\partial_t \varphi^{(n+1)} = \Delta\varphi^{(n+1)} - (\varphi^{(n)})^3 + m\varphi^{(n)} + \xi, \quad \varphi^{(n+1)}(0,\cdot) = \varphi_0$$

によって定める。最終的には次のような形が現れることが分かる。

$$\varphi = K * \xi - K * (K*\xi)^3 + 3K * \{(K*\xi)^2 K * (K*\xi)^3\} + \cdots . \tag{1}$$

ここで K は熱核、$*$ は (t,x) に関する畳み込みを表す。簡単のため次のような記号を導入する。

$$\mathbf{I} = K*\xi, \quad \mathbf{V} = (K*\xi)^2, \quad \boldsymbol{\Psi} = (K*\xi)^3, \quad \boldsymbol{\Upsilon} = K*(K*\xi)^3, \ldots .$$

GIP 理論では (1) の各項のレギュラリティに注目し、φ を適当なレギュラリティを持つ超関数の和として定義した。一方 Hairer 理論では分解 (1) を抽象化した代数構造を用意し、解のレギュラリティという概念をその構造の上で捉え直す。

Hairer 理論の考え方を Taylor 展開をヒントにして説明する。時空の変数を $z = (t,x)$ と表し、スケール変換 $(t,x) \mapsto (\lambda^2 t, \lambda x)$ に適合するノルム $|z| = |t|^{1/2} + |x|$ を定義する。関数 $f = f(z)$ がクラス $\mathcal{C}^\gamma$（$\gamma > 0$）に属するとは、適当な関数の族 $\{f_k (= \frac{1}{k!} f^{(k)})\}_{|k|<\gamma}$ が存在して z_0 の周りで

$$f(z) = \sum_{|k|<\gamma} f_k(z_0)(z-z_0)^k + O(|z-z_0|^\gamma)$$

と展開されることと定義される。これを抽象化して

$$\hat{f}(z) = \sum_{|k|<\gamma} f_k(z) X^k$$

という多項式を定義する。X^k は任意の点の周りでのレギュラリティを表す変数で、$\Pi_z X^k = (\cdot - z)^k$ と対応させることで

$$|(\Pi_{z_0}\hat{f}(z_0))(z) - f(z)| \lesssim |z - z_0|^\gamma$$

という評価が成り立つ。また $\langle X^k \rangle$ 上の変換 $\Gamma_{zz_0} X^k = (X + (z - z_0))^k$ によって異なる 2 点の間での係数 f_k の値を次のように比較できる。

$$|(\Gamma_{zz_0}\hat{f}(z_0))_k - f_k(z)| \lesssim |z - z_0|^{\gamma - |k|}.$$

逆にこのような比較評価があれば、$\hat{f}$ から元の関数 f を復元することができる。ここまで現れた要素を次のように一般化する。

定義 1. *1.* 実数の集合 A を 0 を含み下から有界で局所有限なものとする。$T = \oplus_{\alpha \in A} T_\alpha$ を有限次元ノルム空間 T_α の直和、G を T 上の有界作用素の群で任意の $\Gamma \in G$ と $\tau \in T_\alpha$ に対し $\Gamma\tau \in \tau + \oplus_{\beta < \alpha} T_\beta$ が成り立つものとする。この (A, T, G) を正則性構造という。

2. $\Pi = \{\Pi_z : T \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)\}_{z \in \mathbb{R}^4}$ と $\Gamma = \{\Gamma_{zz'} \in G\}_{z, z' \in \mathbb{R}^4}$ を写像の族で、任意の $z, z', z'' \in \mathbb{R}^4$ に対し $\Pi_z \Gamma_{zz'} = \Pi_{z'}$ と $\Gamma_{zz'}\Gamma_{z'z''} = \Gamma_{zz''}$ を満たし、任意の $\tau \in T_\alpha$、テスト関数 ρ、$\delta \in (0, 1]$ に対し

$$|(\Pi_z \tau)(\rho_z^\delta)| \lesssim \|\tau\|_\alpha \delta^\alpha, \quad \|\Gamma_{zz'}\tau\|_\beta \lesssim \|\tau\|_\alpha |z - z'|^{\alpha - \beta}$$

を満たすものとする。（ここで ρ_z^δ は z 中心のスケール変換 $\rho_z^\delta(z') = \delta^{-5}\rho(\delta^{-2}(t' - t), \delta^{-1}(x' - x))$ を表す。）この (Π, Γ) をモデルという。

3. 関数 $f : \mathbb{R}^4 \to T$ で $\|f(z) - \Gamma_{zz'} f(z')\|_\beta \lesssim |z - z'|^{\gamma - \beta}$ を満たすものをモデル関数といい、その全体を $\mathcal{D}^\gamma$ と表す。

定理 1. $\gamma > 0$ とする。モデル関数 $f \in \mathcal{D}^\gamma$ に対し、超関数 $\mathcal{R}f$ で

$$|(\mathcal{R}f - \Pi_z f(z))(\rho_z^\delta)| \lesssim \delta^\gamma$$

を満たすものが一意的に存在する。写像 $\mathcal{R} : \mathcal{D}^\gamma \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ は線形かつ連続である。この $\mathcal{R}$ を復元作用素という。

(1) を表すために、次のような線形空間を導入する。

$$T = \langle \Xi, \Psi, \vee, \Psi\!\vee, \mathsf{I}, \Psi\!\mathsf{I}, \vee\!\mathsf{I}, X_i \vee, \mathbf{1}, \ldots \rangle.$$

すなわち $\langle X^k \rangle$ を含み、ξ の抽象化 “Ξ”、K との畳み込み（$\mathcal{I} : \Psi \mapsto \mathsf{Y}$ など）、そして積（$\mathsf{I} \times \mathsf{I} \to \vee$ など）を許す。小さい $\kappa > 0$ を固定して各変数の次数を

$$|\Xi| = -\tfrac{5}{2} - \kappa, \quad |\mathsf{I}| = -\tfrac{1}{2} - \kappa, \quad |\Psi| = -\tfrac{3}{2} - 3\kappa, \quad |\mathsf{Y}| = \tfrac{1}{2} - 3\kappa$$

などと定義する。つまり K との畳み込みで次数は 2 上がり、二つの変数の積の次数はそれぞれの次数の和であるとする。モデル (Π,Γ) には K との畳み込みとの可換性

$$(\Pi_{z_0}\mathcal{I}\tau)(z) = (K * \Pi_{z_0}\tau)(z) - \sum_{|k|<|\tau|+2} \frac{(z-z_0)^k}{k!}(K * \Pi_{z_0}\tau)^{(k)}(z_0) \qquad (2)$$

を仮定するが、積 $\Pi_z\tau\tau'$ の定義についてはある程度の自由を与えることにする。（GIP 理論で考えたような「繰り込みされた積」を後で代入する。）以上の準備の下でモデル関数としての解

$$\Phi = \mathsf{I} + \varphi_{\mathbf{1}}\mathbf{1} - \Psi - 3\varphi_{\mathbf{1}}\mathsf{Y} + \varphi_{X_i}X_i + \cdots$$

を唯一つ見つけることができる。

定理 2. *1.* (2) を仮定したモデル (Π,Γ) に対し、モデル関数としての解 Φ が一意的に存在する。写像 $(\varphi_0,(\Pi,\Gamma)) \mapsto \Phi$ は連続である。

2. $\epsilon \downarrow 0$ で ξ を近似する滑らかな関数 ξ^ϵ を考える。このときモデル $(\Pi^\epsilon,\Gamma^\epsilon)$ を適切に定義すると、対応する解の復元 $\varphi^\epsilon = \mathcal{R}\Phi^\epsilon$ はある定数 $C^\epsilon = O(\epsilon^{-1})$ に対して方程式

$$\partial_t\varphi^\epsilon = \Delta\varphi^\epsilon - (\varphi^\epsilon)^3 + C^\epsilon\varphi^\epsilon + \xi, \quad \varphi^\epsilon(0,\cdot) = \varphi_0$$

を満たす。また $(\Pi^\epsilon,\Gamma^\epsilon)$ は近似の仕方によらないモデル (Π,Γ) に収束し、従って φ^ϵ はある普遍的な極限 $\varphi = \mathcal{R}\Phi$ を持つ。

Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs

難波 隆弥 (岡山大学) e-mail: sc422113@s.okayama-u.ac.jp
(石渡 聡氏 (山形大学) および河備 浩司氏 (岡山大学) との共同研究)

1 はじめに

グラフ上のランダムウォーク (RW) は現在盛んに研究が進展している対象で, 多くの分野からのアプローチが図られている. 特に周期性を持つ無限グラフ, 例えば結晶格子上の RW については多くの研究がなされている. ここに X が結晶格子であるとは, 捩れのない有限生成アーベル群 Γ が X に自由作用し, その作用による商グラフ $X_0 := \Gamma\backslash X$ が有限グラフであるときをいう. 小谷–砂田は離散幾何解析の手法を経由して結晶格子上の RW を研究し, その中で周期的実現 $\Phi_0 : X \longrightarrow \Gamma \otimes \mathbb{R}$ の (修正) 調和性とよばれる概念を定めた ([3]). 石渡–河備–小谷は [2] の中で結晶格子上の非対称 RW を考察し, 修正調和性の仮定の下, 2 種類の汎関数中心極限定理を得ている.

一方, 石渡は被覆変換群 Γ が捩れのない有限生成べき零群であるような被覆グラフ (**べき零被覆グラフ**)X 上の対称 RW について議論し, Γ を格子として含むべき零 Lie 群 G への周期的実現 $\Phi_0 : X \longrightarrow G$ の調和性を定め, この下で推移半群に関する中心極限定理を得ている ([1]) ものの, プロセスレベルでの収束に関しては示されていなかった.

本講演では, べき零被覆グラフ上の非対称 RW を扱い, その G への周期的実現の修正調和性を定義する. その仮定の下, 石渡による結果 ([1]) が非対称の場合にも拡張できることを述べる. その上プロセスレベルでの収束も導かれること, すなわち汎関数中心極限定理が得られることを報告する.

2 べき零被覆グラフとその周期的実現の修正調和性

以下, べき零被覆グラフ $X = (V, E)$ (V : 頂点集合, E : 向きつき辺の集合) 上の RW を考察する. $e \in E$ に対して, $o(e), t(e), \overline{e}$ でそれぞれ辺 e の始点, 終点, e の逆向きの辺を表し, $E_x := \{e \in E \,|\, o(e) = x\}$ $(x \in V)$ とする. いま, $p : E \longrightarrow (0, 1]$ を Γ-不変な推移確率とし, それから定まる RW を $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ とするが, p の Γ-不変性に注意し, 商グラフ $X_0 = (V_0, E_0)$ 上の RW $\{\pi(w_n)\}_{n=0}^{\infty}$ も考察する. ここに, $\pi : X \longrightarrow X_0$ は被覆写像である. また $m : V_0 \longrightarrow (0, 1]$ を V_0 上の (正規化) 不変測度とし, その X 上への Γ-不変なリフトをも $m : V \longrightarrow (0, 1]$ で表す. さて $\mathrm{H}_1(X_0, \mathbb{R}), \mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{R})$ を各々X_0 の 1 次ホモロジー群, 1 次コホモロジー群とする. いま, X_0 上の RW に対して, *homological direction* を $\gamma_p := \sum_{e \in E_0} p(e)m\big(o(e)\big)e \in \mathrm{H}_1(X_0, \mathbb{R})$ で定める. また X_0 上の RW が (m-) 対称であることを $p(e)m\big(o(e)\big) = p(\overline{e})\big(t(e)\big)$ $(e \in E_0)$ が成り立つときと定めるが, これは $\gamma_p = 0$ と同値である.

さて, Malćev の定理より連結かつ単連結なべき零 Lie 群 G で, Γ がその格子と同型であるものがとれる. そこで X を周期的に実現する連続モデルとして我々は G を採用する. また, 以

下では G が**ステップ 2 の自由べき零 Lie 群である**と仮定する．つまり，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ が直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$ をもつ．いま，被覆写像 π を介し自然な全射準同型 $\rho_{\mathbb{R}} : \mathrm{H}_1(X_0, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{g}^{(1)}$ をとる．一方, Hodge–小平の定理によれば $\mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{R})$ 上には X_0 上の (修正) 調和 1-形式の空間から, p により定まる内積が誘導できる．これは $\rho_{\mathbb{R}}$ を用いて $\mathfrak{g}^{(1)}$ 上に誘導でき，それより定まる平坦計量を Albanese 計量とよんで g_0 で表す．さて X の周期的実現 $\Phi_0 : X \longrightarrow G$ の **(修正) 調和性**を

$$\sum_{e \in E_x} p(e) \log \Big(\Phi_0\big(o(e)\big)^{-1} \cdot \Phi_0\big(t(e)\big)\Big)\Big|_{\mathfrak{g}^{(1)}} = \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) \quad (x \in V). \tag{1}$$

で定義する．(1) の右辺の量を *asymptotic direction* とよぶ．ここで RW が対称, つまり $\gamma_p = 0$ のときは $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$ であるが, 逆は一般に成立しないことに注意する．

3　主結果

以下べき零被覆グラフ X の修正調和実現 $\Phi_0 : X \longrightarrow G$ で, 基点 $x_* \in V$ に対し $\Phi_0(x_*) = \mathbf{1}_G$ なるものをとる．いま, $\mathfrak{g}$ 上の RW を $\Xi_n := \log\big(\Phi_0(w_n)\big)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ で定め, G-値連続確率過程列 $\{\mathcal{Y}_t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ を $\mathcal{Y}_t^{(n)} := \tau_{n^{-1/2}}\big(\exp(\mathfrak{X}_t^{(n)})\big)$ $(t \in [0,1])$ で定義する．ここに τ_ε $(0 \le \varepsilon \le 1)$ は G 上の dilation で, $\mathfrak{X}_t^{(n)} := \Xi_{[nt]} + (nt - [nt])\big(\Xi_{[nt]+1} - \Xi_{[nt]}\big)$ である．ここで $\{V_1, \dots, V_d\}$ を $(\mathfrak{g}^{(1)}, g_0)$ の正規直交基底とする．このとき, G が自由という仮定から $\{[V_i, V_j] : 1 \le i < j \le d\}$ が $\mathfrak{g}^{(2)}$ の基底を与えることに注意する．また, $\widetilde{e}$ を $e \in E_0$ の X 上へのリフトとして

$$\beta(\Phi_0) := \sum_{e \in E_0} p(e) m\big(o(e)\big) \log \Big(\Phi_0\big(o(\widetilde{e})\big)^{-1} \cdot \Phi_0\big(t(\widetilde{e})\big)\Big)\Big|_{\mathfrak{g}^{(2)}} = \sum_{1 \le i < j \le d} \beta(\Phi_0)^{ij} [V_i, V_j]$$

とおく．$\gamma_p = 0 \Longrightarrow \beta(\Phi_0) = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$ に注意せよ．また, $(Y_t)_{t \ge 0}$ を $\mathbf{1}_G$ 出発の G-値拡散過程で次の SDE

$$dY_t = \sum_{1 \le i \le d} V_i(Y_t) \circ dB_t^i + \beta(\Phi_0)(Y_t)\, dt$$

の解とする．ただし, $(B_t)_{t \ge 0} = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t \ge 0}$ は $\mathbb{R}^d$-値標準 Brown 運動である．また, この SDE に対応する生成作用素を $\mathcal{A} := (1/2) \sum_{1 \le i \le d} V_i^2 + \beta(\Phi_0)$ とする．このとき次の定理を得た．

定理 1 $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$ とする．このとき $t \ge 0$ および $f \in C_\infty(G)$ に対して, 次の中心極限定理

$$\lim_{n \to \infty} \Big\| L^{[nt]} P_{n^{-1/2}} f - P_{n^{-1/2}} \mathrm{e}^{-t\mathcal{A}} f \Big\|_\infty^X = 0$$

が成り立つ．ここに L は X 上の推移作用素であり, P_ε $(0 \le \varepsilon \le 1)$ はスケール作用素である．さらに**汎関数中心極限定理**: $(\mathcal{Y}_t^{(n)})_{t \ge 0} \underset{n \to \infty}{\Longrightarrow} (Y_t)_{t \ge 0}$ *in* $C_{\mathbf{1}_G}([0,1]; G)$ が成り立つ．

時間が許せば, 定理の証明および具体的なべき零被覆グラフ上の RW の例についても触れたい．

参考文献

[1] S. Ishiwata: J. Math. Soc. Japan **55** (2003), pp. 837–853.

[2] S. Ishiwata, H. Kawabi and M. Kotani: arXiv:1510.05102.

[3] M. Kotani and T. Sunada: Math. Z. **254** (2006), pp. 837–870.

Kolmogorov 拡散過程のスペクトル

重川 一郎　京都大学

1　導入

$\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}$ で生成される拡散過程考える．特に a が 2 次式で， b が 1 次式の場合を Kolmogorov 拡散過程とよぶ.（Pearson-Kolmogorov 拡散過程と呼ぶこともある.）Pearson の名前を付けるのは，拡散過程のその標準測度が Pearson 分布になることによる．また，固有関数が多項式になるものを考えるとき，a, b の仮定は，自然なものであろう．ここでは，Kolmogorov 拡散過程のスペクトルについて論じる．

2　Pearson 分布族

まず密度 ρ が次のような形をしている分布を Pearson 分布族という．

$$\rho(x) = \exp\left\{ \int \frac{g(x)}{f(x)} \right\} dx. \tag{1}$$

ここで $g(x)$ は 1 次式で，$f(x)$ は 2 次式である．所与の区間で $f > 0$ を仮定している．特に ρ が確率密度のときを Pearson 分布族と言うが，ここでは特に正規化されてなくてもよいし，無限の測度を持つ場合も一緒に考えることにする．(1) の形の関数を Pearson 密度と総称する．

確率密度で言うと

	密度関数	区間
1	$e^{-\beta x^2/2}$	$\mathbb{R}$
2	$x^\alpha e^{-\beta x}$	$(0,\infty)$
3	$x^\alpha (1-x)^\beta$	$(0,1)$
4	$(1+x^2)^\alpha \exp\{\beta \arctan x\}$	$\mathbb{R}$
5	$x^\alpha e^{-\beta/x}$	$(0,\infty)$
6	$x^\alpha (1+x)^\beta$	$(0,\infty)$

となる．これらはいくつかの（特に統計で）重要な分布を含んでいる。これは少し違った観点から次のような分類も可能である．

	完全系列	不完全系列
α-系列	正規分布	t-分布
β-系列	ガンマ分布	極値分布
γ-系列	ベーター分布	F-分布 & Pareto 分布

3 生成作用素の表現と双対性

1 次元の拡散過程の生成作用素は

$$\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} \tag{2}$$

と表される．このとき，a が二次式で，b が 1 次式のとき，Feller の意味での標準測度が Pearson 分布になることを Kolmogorov が注意している．そこで，この形の拡散過程を Kolmogorov diffusion あるいは Pearson-Kolmogorov diffusion と呼ぶことにする．

生成作用素 $\mathfrak{A}$ の表現には，いくつかの流儀がある．これを次のように分類する．

名前	生成作用素	双対性	微分作用素
Kolmogorov	$a\dfrac{d^2}{dx^2} + b\dfrac{d}{dx}$		
Feller	$\dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds}$	$\dfrac{d}{dm} = -\dfrac{d}{ds}^*$	$\dfrac{d}{ds} : L^2(dm) \to L^2(ds)$
Stein	$\left(a\dfrac{d}{dx} + b\right)\dfrac{d}{dx}$	$a\dfrac{d}{dx} + b = -\dfrac{d}{dx}^*$	$\dfrac{d}{dx} : L^2(\rho) \to L^2(a\rho)$

上の Feller の双対性と，Stein の双対性から次のような対応が作られる．

Feller's pair	$\dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds} \longleftrightarrow \dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds}$
Stein's pair	$(a\dfrac{d}{dx} + b)\dfrac{d}{dx} \longleftrightarrow \dfrac{d}{dx}(a\dfrac{d}{dx} + b)$

一つの特徴として Kolmogorov 拡散過程は，上の Feller's pair, Stein's pair で閉じていることが証明できるので，自然なクラスであることが分かる．

また Feller's pair, Stein's pair は超対称性にもとづく物なので次のことが分かる．

- f が固有関数なら f', $\frac{d}{ds}f$ も固有関数になる．
- θ が固有関数なら $a\theta' + b\theta$, $\frac{d}{dm}\theta$ も固有関数になる．

これらの事実が具体例でどうなっているかを講演の中でいくつか紹介する．

References

[1] A. Kolmogoroff, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, (German) Math. Ann., **104** (1931), no. 1, 415–458.

繰り込み群と物理学の難問 (ミレニアム問題)

立教大学数理物理学研究センター
伊東恵一

1 ミレニアム問題

A.Jaffe 先生が 2000 年ころにクレイ研究所からミレニアム問題という一連の問題を出したが [9], そのうち数理物理学関連の問題として

1. クオーク粒子の幽閉を含む 4 次元ゲージ場理論の構成
2. ナヴィエ・ストークス方程式の解とその性質

があげられ [6], これらはリーマン予想と並んでいる. この二つの問題は, 非常な高エネルギー（短い距離の現象）と低いエネルギー（実世界の距離) が非線形性によって相互に関連している共通性がある. 他方今話題になっている, KPZ 方程式に始まる SPDE では, 非線形方程式にすべての振動数をもつ white noise が絡まるというもので、同じ側面をもっている [5, 10].

繰り込み群は, 無限次元の積分, しかも長い波長、短い波長が干渉しあう非線形の場面で, 短い振動から長いほうに向かって, (あるいは逆に) 順繰りに積分する分析法で, ミレニアム問題に対する繰り込み群的アプローチとして,

1. A.Jaffe-T.Balaban による YM_4 の研究 [1] (Harvard group)
2. Ya Sinai による乱流の繰り込み群による研究 (Princeton group)

などと試みられたが成功とはいえない. 完成した今までの結果をまとめておくと

1. 3 次元 ϕ^4 モデルの解の存在 [2]
2. 4 次元 ϕ^4 モデルは正で小さい結合定数ならば解は自明（ガウス場) になることの証明 [4]
3. 非線形微分方程式の臨界指数

この講演は最初の問題への中間点にあるもので, 非線形なシステムで汎関数積分を遂行する方法をより簡単な問題（だけどむつかしい）に限定して話させていただく.

2 KPZ と繰り込み群

KPZ も white noise Ξ をもつ SPDE で

$$\begin{aligned} \partial_t h &= \partial_x^2 h + F(\partial_x h) + \Xi, \quad F(u) = a_0 + a_2 u^2 + \cdots \\ \mathbf{E}(\Xi(t,x)\Xi(t',x')) &= \delta(t-t')\delta(x-x'), \quad s,t > 0 \end{aligned}$$

という形をもつ. Hairer は彼の理論でこの解が彼の “繰り込み” を経由して, Hopf-Cole 解に収束することを示した [5] (これは厳密解が発見されている)。他方 H.Spohn は h を 3 成分 $h = (h_1, h_2, h_3)$ に拡張し (Ξ も 3 成分), Kupiainen [10] が Wilson 流の繰り込み法で任意の成分数の h について解の存在を証明している。 Hairer も Kupiainen も, $\varepsilon > 0$ 以下の距離を取り除く 軟化作用素（ある

いは切断) をいれ, 極限をとるのは同じで, 場の理論の繰り込みと共通する方法である. ここでは彼の Wilson 流の解析を紹介してみる。$h \to u$, $F \to V$ として

$$\begin{aligned} u &= G * (V(\partial_x u) + \Xi) + e^{t\Delta} u_0 \\ G(x,t) &= e^{t\Delta} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp[-x^2/2t] \end{aligned}$$

と書き換え, G から $0 < t < \varepsilon^2$ 部を切り離す. $\chi(t)$ を $[0,1]$ の (端をなめらかにした) 特性関数とし

$$\begin{aligned} u &= G_\varepsilon * (V(\partial_x u) + \Xi) + e^{t\Delta} u_0 \\ G_\varepsilon(x,t) &= e^{t\Delta}(x,0)(1 - \chi(\varepsilon^{-2} t) \end{aligned}$$

ここで u は複数成分で

$$V(\partial_x) = (\partial_x u, M \partial_x u)$$

2.1 Block Spin 変換 と PKZ

Block Spin 変換は上記の積分方程式を逐次にとくもので

1. スケール変換 s_ε で $t \to \varepsilon^2 t$,$x \to \varepsilon x$ 行い $G_\varepsilon \to G_1$ にする. $\varphi = s_\varepsilon u$
2. $G_1 = G_{L^2} + (G_1 - G_{L^2})$ とし $|x| > L$ と $1 < |x| < L$ に分離
3. $(G_1 - G_{L^2})$ 部の積分方程式を解き G_{L^2} に代入. $s \equiv s_{L^{-1}}$ でスケールダウンして, G_{L^2} を G_1 にして繰り返す

すなわち, $\varepsilon \to 1$ にしてから step 2 では

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi_1 &= G_{L^2} * (v^\varepsilon(\varphi_1 + \varphi_2) + \xi) \\ \varphi_2 &= (G_1 - G_{L^2}) * (v^\varepsilon(\varphi_1 + \varphi_2) + \xi) \end{aligned}$$

step 3 では,

$$\varphi_1 = \varphi', \varphi_2 = s\zeta$$

と書きかえて（$L^2 \to 1$)

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi' &= G_1 * (S v^\varepsilon(\varphi' + \zeta) + \xi) \\ \zeta &= \Gamma * (S v^\varepsilon(\varphi' + \zeta) + \xi) \end{aligned}$$

(S は $s = s_{L-1}$, s^{-1} からなる作用素である) ここで

$$\Gamma = e^{t\Delta}(\chi(t) - \chi(L^2 t))$$

は 1 と L^{-1} のスケールに生きていて, ζ はもとまり $\varphi' + \zeta = \varphi' + \zeta(\varphi')$ として, 繰り返す. この Γ は性質のいい積分核で繰り込み変換で重要な役担う. ζ は θ (Γ で平滑化された ξ) で表わされ

$$(\phi + \theta, M(\phi + \theta))$$

の発散の消去のため $\mathbf{E}(\theta(t,x)\theta(s,y))$ という繰り込み補正項 (この場合定数項) を導出する.

3 非線形モデルの繰り込み群

4 次元ゲージ模型の単純版である 2 次元シグマモデル, $O(N)$ スピンモデル, あるいはハイゼンベルグモデルを考える。$\phi(x)=(\phi_1(x),\cdots,\phi_N(x))\in R^N$ を N 成分スピンとして

$$\langle\ldots\rangle \quad = \quad \frac{1}{Z_\Lambda}\int[\ldots]\exp\left[-\frac{1}{2}\langle\phi,(-\Delta+m_0^2)\phi\rangle-\frac{g_0}{2N}\sum_{x\in\Lambda}(\phi^2(x)-\beta_{\rm orig})^2\right]\prod_{x\in\Lambda}d^N\phi(x) \quad (1)$$

が対象で, ϕ は N 次元の半径 $\sqrt{\beta_{orig}}$ の球面に値をとるスピンで, 非アーベル的対称性 $SO(N)$ をもつ. $N>2$ において相転移がないと信じられている。ここで　$\Lambda\subset Z^2$ は方形領域, $g_0>0$ は結合定数, $(-\Delta)_{xy}=4\delta_{xy}-\delta_{1,|x-y|}$ は格子ラプラシアン. なお $N=1$ で Ising 模型 (Peiers-Onsagaer), $N=2$ で XY 模型といい, 2016 年度物理学ノーベル賞の Kosterlitz-Thoules は $N=2$ で相転移があることを予言し, Froehlich-Spencer [3] が証明した. 質量 $m_0>0$ は任意にとれるが

$$NG_0(0)=\beta_{orig},\quad G_0(x,y)\equiv\frac{1}{-\Delta+m_0^2}(x,y) \quad (2)$$

ととれば $\phi^2(x)-\beta_{orig}$ を Wick 積 $:\phi^2(x):$ にとれる.　$SO(N)$ 不変性を持つこのモデルの難点は

1. 境界壁の定義　(Ising 模型との著しい相違)
2. $e^{-\sum_x(\phi_x^2-\beta)^2}$ の非摂動的積分計算

この問題を Wilson のブロックスピン変換でもとめる。Δ_0 は大きさ $L\times L$, 中心原点の正方形として

$$(Cf)(x) \quad = \quad \frac{1}{L^2}\sum_{\zeta\in\Delta_0}f(Lx+\zeta) \quad (3)$$

$$\phi_n(x) \quad = \quad (C\phi_{n-1})(x) \quad (4)$$

つまりブロック変換作用素 C は算術平均とスケールダウンからなる.

$$\Lambda_n=L^{-n}\Lambda\cap Z^2 \quad (5)$$

ブロックスピン　$\phi_n(x)$ の Green 関数は

$$G_n(x,y)=(CG_{n-1}C^+)(x,y)=\frac{1}{L^4}\sum_{\zeta\in\Delta_0,\xi\in\Delta_0}G_{n-1}(Lx+\zeta,Ly+\xi),\quad x\in\Lambda_n,y\in\Lambda_n \quad (6)$$

Wick 積

$$:\phi_n(x)\phi_n(y):_{G_n}=\phi_n(x)\phi_n(y)-NG_n(x,y) \quad (7)$$

はスピンの回転の程度（境界壁の強さ）を表わすというのがこの仕事の発端である [7]。

$$\exp[-W_n(\phi_n)] \quad = \quad \int\exp[-W_{n-1}(\phi_{n-1})]\prod\delta(\phi_n(x)-(C\phi_{n-1})(x))\prod d\phi_{n-1}(x), \quad (8)$$

$$W_0(\phi_0) \quad = \quad \frac{1}{2}\langle\phi_0,G_0^{-1}\phi_0\rangle_\Lambda+\frac{g_0}{2N}\langle:\phi_0^2:_{G_0},:\phi_0^2:_{G_0}\rangle \quad (9)$$

3.1 BST

$N(0, G_0)$ であるガウス変数 ϕ_0 を $N(0, G_1)$ である ϕ_1 と, $N(0, \Gamma_0)$ である ξ に分解する

$$\begin{aligned}\phi(x) &= (A_1\phi_1)(x) + (Q\xi_0)(x), \xi(x), x \in \Lambda - L\Lambda_1 \\ (CA_1)(x,y) &= \delta_{x,y}, \quad (CQ)(x,y) = 0\end{aligned}$$

すなわち

$$\langle \phi, G_0^{-1}\phi\rangle = \langle \phi_1, G_1^{-1}\phi_1\rangle + \langle \xi_0, \Gamma_0^{-1}\xi_0\rangle \tag{10}$$

$$G_1^{-1} = A_1^+ G_0^{-1} A_1, \quad \Gamma_0^{-1} = Q^+ G_0^{-1} Q \tag{11}$$

一般には

$$A_n = G_{n-1} C^+ G_n^{-1} \tag{12}$$

$$Q(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y \notin L\Lambda_n \\ -1 & \text{if } x \in L\Lambda_n \text{ and } y \in \Delta_x \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases} \tag{13}$$

とればこの分解が成り立つ

$$\begin{aligned}&\phi_n = A_{n+1}\phi_{n+1} + Q\xi_n \\ &\langle \phi_n, G_n^{-1}\phi_n\rangle = \langle \phi_{n+1}, G_{n+1}^{-1}\phi_{n+1}\rangle + \langle \xi_n, \Gamma_n^{-1}\xi_n\rangle \\ &G_{n+1}^{-1} = A_n^+ G_n^{-1} A_n, \quad \Gamma_n^{-1} = Q^+ G_n^{-1} Q\end{aligned}$$

1. $A_n : R^{\Lambda_n} \to R^{\Lambda_{n-1}}$ は $CA_n = 1$, $A_n(x,y) \sim \exp[-c|x/L - y|]$, $c = O(1)$.
2. $Q : R^{\Lambda_n \setminus L\Lambda_{n+1}} \to R^{\Lambda_n}$ ブロック毎に対角, 零平均揺動場をつくる

[演習] この処置がガウスを二つのガウスに分解することを確かめよ. また m_0 にかかわらず, ξ の 2 点関数 $\Gamma_n(x,y)$ は指数的に減少することを示せ

3.2 関数または配位空間

BST が遂行できる関数空間 $\mathcal{H} = \{\phi\}$ はボールの上をスムースに伝搬するスピン=津波の上を伝搬するさざ波である. すなわち $\tau_0 > 0$ をある大きい定数として

$$(1) \qquad |:\phi_n^2(x):_{G_n}| \le \tau_0 N^{1/2} \tag{14}$$

$$(2) \qquad |:\phi_n(x)\phi_n(y):_{G_n}| \le \tau_0 N^{1/2} \exp[(c/10)|x-y|],\ c > 0 \tag{15}$$

$$(3) \qquad |\nabla_\mu \phi_n(x)| = |\phi_n(x + e_\mu) - \phi_n(x)| \le \tau_0 N^{1/2} \tag{16}$$

$D = X^c$ では境界壁または大きい場が現れ摂動計算から逸脱する.

(1) $D_w(\phi_n) =$ paved set such that $\forall \square \subset D_w, \exists \square' \subset D_w$ and it holds that

$$|:\phi_n(x)\phi_n(y):_{G_n}| \ge \tau_0 N^{1/2} \exp[\frac{c}{10}|x-y|],\ \exists x \in \square, \exists y \in \square' \tag{17}$$

(2) $D_0(\phi_n) =$ minimal paved set such that

$$|:\phi_n^2(x):_{G_n}| \le \tau_0 N^{1/2} \exp[\frac{c}{10}|x-y|],\ \forall x \in D_0(\varphi), \forall y \in D_0(\varphi)^c \tag{18}$$

この領域 D はそのほかの場所から「隔離」されるが, 高エネルギーをもち「実現確率は小さい」. 残りのポリマー展開の収束性を保証することが必要。

3.3 BST の流れ, 階層近似で

階層近似模型といわれているものを考える．これは Dyson の発明．ラプラシアン部 $\exp[-(1/2)\langle\phi_n,(-\Delta)\phi_n\rangle]$ を階層近似してみよう．格子の代わりに入れ子になった方形領域の列を想定している:

$$
\begin{aligned}
&\exp[-(1/2)\langle\phi_n,(-\Delta)_{hcl}\phi_n\rangle\\
&=\exp[-(1/2)\langle\phi_{n+1},(-\Delta)_{hcl}\phi_{n+1}\rangle-(1/2)\sum_x\xi_n(x)^2],\quad n=0,1,\cdots
\end{aligned}
$$

がそこでは成り立ち

$$\phi_n(2x+s)=\phi_{n+1}(x)+(-1)^s\xi_n(x),\quad s=0,1$$

ということになる．$g_0(\phi)=\delta(\phi^2-N\beta)$ から始め，2 個のスピン $\phi_\pm$ を含む大きさ $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ の箱を準備，$\phi_\pm\equiv\phi\pm\xi$ とおく．ここで $\phi=\phi_{n+1}$, $\xi=\xi_n$．よって $2\xi^2=\phi_+^2+\phi_-^2-2\phi^2$、$\phi=(\varphi,0)\in R_+\times R^{N-1}$. そこで $\xi=(s,u)\in R\times R^{N-1}$、$f(x)=g_n(x)e^{-x/4}$, $x=\varphi^2$ とおけば

$$
\begin{aligned}
g_{n+1}(x) &= e^{x/2}\int f((\phi+\xi)^2)f((\phi-\xi)^2)ds d^{N-1}u\\
&= e^{x/2}\int f((\varphi+s)^2+u^2)f((\varphi-s)^2+u^2)ds d^{N-1}u\\
&= \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}\int_{\mathcal{D}} f(p)f(q)\mu(x,p,q)^{(N-3)/2}dpdq \qquad (19a)\\
\mu(x,p,q) &= \frac{p+q}{2}-x-\frac{(p-q)^2}{16x} \qquad (19b)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{D}\subset[0,N\beta]^{\times 2}$ は $\mu(x,p,q)>0$ の領域．g_{n+1} は二つのスピン $\phi_\pm\equiv\phi\pm\xi\in R^N$ が $\phi\in R^N$, $\phi^2=x$ を作る確率密度とみなせる．$V_n=-\log g_n$ (実効的ポテンシャル) とけば

1. $V_n'(x)$ は a priori bounds をみたす

2. $g_n(x)\to\delta(x)$ $(n_0<)\, n\to\infty$.

［演習］ (1), (2) を示せ [8].)

大きい N では $V_n=Nv_n$, $x=\phi^2/N$ などとして steepest-descent で

$$v_{n+1}(x)=\min_u\left(\frac{1}{2}(u-\log u)+2v_n(x+u)\right) \qquad (20)$$

［演習］ $v_{n+1}'(x)=2v_n'(x+u^*)=(1/u^*-1)/2$ となること, (u^* は minimizer). これは厳密に解け,$v_n'=0$ の近傍で $v_n(x)\sim(x-\beta+n)^2/8$ となることを示せ.

そこで形式的に $W_n\to W_{n+1}$ は次式で定められる

$$e^{-W_{n+1}(\phi_{n+1})}=\int\exp[-W_n(A_{n+1}\phi_{n+1}+Q\xi_n)]\prod d\xi_n \qquad (21)$$

ただし右辺の積分では, 大きい場/境界壁領域 $D=D_0\cup D_w$ は小場/なめらか 領域で薄く囲み（襟領域という）他の場から隔離され, $\Lambda=K\cup D$, $K=D^c$ とおいて

$$g_n^D(\phi_n)\exp[-W_n^K(\phi_n)] \qquad (22)$$

と表わしておく. ここで D は多くの連結領域からなるであろうし, 主要項 W_n^K は

$$W_n^K(\phi_n) = \frac{1}{2}\langle \phi_n, G_n^{-1}\phi_n\rangle_{\Lambda_n} + \frac{1}{2N}\langle : \phi_n^2 :_{G_n}, \chi_K D_n \chi_K : \phi_n^2 :_{G_n}\rangle_{\Lambda_n} + F_{n,irr} + \delta F_{n,irr} \tag{23}$$

ここで

$$\langle f, g\rangle_{\Lambda_n} = \sum_{x\in\Lambda_n} f(x)g(x)$$

K は $\phi_n(x)$ を $\phi_n(x), x \in K$ に限定したもの, $F_{n,irr}$ は main irrelevant term (繰り込み変換で減少する項) で $\delta F_{n,irr}$ は前からの irrelevant terms の集まり.

$D_n > 0$ は ワインの瓶ポテンシャルの結合定数でほぼ対角形 ($D_n(x,y) \sim g_n\delta_{x,y}$) で $D_0 = g_0\delta_{xy}$. $F_{n,irr}$ と $\delta F_{n,irr}$ は $E^\perp$, $\mathcal{N}(C) = \{f; (Cf)(x) = 0\}$ への射影を含み微分として働く。

ワインの瓶ポテンシャルが全体を支配し $(: \varphi_n^2 :_{G_n})^k$, $k \geq 3$ は効かない (irrelevant). あとで以下の定理を示す

[定理] D_n は正値作用素 $D^* = O(1)$ に収束する

$D = D_0(\phi_n) \cup D_w(\phi_n)$ からの寄与は g_n^D でしめされ, $\exp[-\tau_0^2|D(\phi_n)|]$ より小さい.

$$G_n^{-1} \sim -\Delta + m_n^2, \quad m_n^2 \sim L^{2n}m_0^2 \ll 1 \tag{24}$$

前の定理から V_n^K はその $\phi_n^2 = N\beta_n$ での曲率は n によらない。

[定理] パラメータ m_n, β_n と D_n は

$$m_n^2 \sim L^{2n}m_0^2, \quad \beta_n = \beta - O(n), \quad 0 < d_- < D_n < d_+$$

にスケーリング領域で従う, ここで $d_\pm$ は定数

3.4 BST with Domain Walls.

$$z = Q\Gamma_n^{1/2}\xi \tag{25a}$$

$$\varphi_{n+1} = A_{n+1}\phi_{n+1} \tag{25b}$$

$$\phi_n = \varphi_{n+1} + z \tag{25c}$$

とおく

$$\langle \phi_n, G_n^{-1}\phi_n\rangle = \langle \phi_{n+1}, G_{n+1}^{-1}\phi_{n+1}\rangle + \langle \xi, \xi\rangle \tag{25d}$$

領域を

$$D_w(\phi_n) = D_w(\varphi_{n+1}) \cup R(\xi, \phi_{n+1}) \tag{26}$$

と分解する. ここで $R(\xi, \phi_{n+1})$ は ξ が大きい値をとる領域. ϕ_{n+1} は A_{n+1} で平滑化されており $D_w(\varphi_{n+1}) = LD_w(\phi_{n+1})$.

$$d\mu_0 = \prod \exp\left[-\frac{\xi_x^2}{2}\right]\frac{d\xi_x}{(2\pi)^{N/2}}, \quad \xi_x \in R^N \tag{27}$$

とおく. 我々のアイデアは

$$q_n(x) \quad = \quad 2z(x)\varphi_{n+1}(x) + :z^2(x):_{\Gamma_n} \tag{28}$$

を通し, $:\phi_n^2:_{G_n} =: \varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}} + q_n(x)$ の分布を求めること [7]. ここで $x \in D(\phi_n)^c$.

$$P(p,\phi_{n+1}) = \int \exp\left[\frac{i}{\sqrt{N}}\langle\lambda,(p-q)\rangle\right] d\mu_0(\xi)\prod d\lambda_x \tag{29a}$$

$$= \int \exp[\frac{i}{\sqrt{N}}\langle\lambda,(p+NT_n)\rangle]\ \det{}^{-N/2}(1+i\alpha T_n\lambda)$$
$$\times\exp\left[-\frac{2}{N}\langle\lambda,(\varphi_{n+1}\varphi_{n+1})\circ\left(Q\frac{1}{\Gamma_n^{-1}+i\alpha Q^+\lambda Q}Q^+\right)\lambda\rangle\right]\prod d\lambda_x \tag{29b}$$

ここで $d\mu_0$ は $N(1,0)$ の正規分布で

$$\alpha = 2/\sqrt{N},\quad T_n = Q\Gamma_n Q^+$$

ゆえに $\mathrm{Tr}\,\Gamma_n^{1/2}Q^+\lambda Q\Gamma_n^{1/2} = \mathrm{Tr}\,T_n\lambda$, and $\varphi_{n+1}\equiv A_{n+1}\phi_{n+1}$. ここで

$$[(\varphi\varphi)\circ A]_{xy} \quad = \quad \varphi(x)\varphi(y)A(x,y)$$
$$\langle\lambda\varphi, A(\lambda\varphi)\rangle \quad = \quad \langle\lambda,((\varphi\varphi)\circ A)\lambda\rangle$$

$(A\circ B)(x,y) = A(x,y)B(x,y)$ (アダマール積). 行列式を 2 次まで展開する. さらに

$$\varphi_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(y) \quad = \quad N\mathcal{G}_{n+1}(x,y) + :\varphi_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(y):_{G_{n+1}} \tag{30}$$
$$\mathcal{G}_{n+1} \quad \equiv \quad A_{n+1}G_{n+1}A_{n+1}^+ \tag{31}$$

として λ のガウス積分を得る:

$$\exp[-\langle\lambda, M\lambda\rangle],\quad M = 2\mathcal{G}_{n+1}\circ T_n + T_n^{\circ 2} \tag{32}$$

$T_n = Q\Gamma_n Q^+$ は $\mathcal{G}_n$ より早く減少し、よって $(\mathcal{G}_n\circ T_n)(x,y) = \mathcal{G}_n(x,y)T_n(x,y) \sim \beta_n T_n(x,y)$.

M は非局所的な　境界壁因子 $:\varphi_{n+1}\varphi_{n+1}:\circ T_n$ を含みこれは他の係数に微小変化（繰り込み）で処理される。

定理 **1**　$N \geq 3$ かつ $D = D_0(\phi_{n+1})\cup D_w(\phi_{n+1})\cup R(p)$, $R(p)$ は $|p| > N^{1-\varepsilon}$ である領域とする。このとき

$$P(p,\phi_{n+1}) \quad = \quad \sum_n \frac{1}{n!}\sum_{\{X_i\}}\prod_{i=1}^n \tilde{g}_{X_i}^D(p,\phi_{n+1})$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{4N}\langle p,\chi_K\frac{1}{M}\chi_K p\rangle + \textit{(non-local polymers)}\right] \tag{33a}$$

ここで $D\cap X_i \neq \emptyset$, $X = \cup X_i \supset D$, $K = X^c = \Lambda\backslash X$. さらに大場/境界壁因子 $\tilde{g}_{X_i}^D$ は $\{p_x,\phi_{n+1}(x); x\in X_i\}$ のみにより以下の不等式に従う

定理 **2** $D_w(\phi_n)\subset\Lambda_n$ を境界壁領域で極小連結集合であるとする. ϕ_{n+1} が与えられ $D_w(\phi_n)\cap LD(\phi_{n+1}) = \emptyset$　ならばこの配位の起こる確率 $P(D_w) = P(\phi_n|\phi_{n+1})$ は以下の不等式を満たす

$$P(D_w) \leq \exp\left[-\mathrm{const.}\,\tau_0^2|D_w|\right] \tag{34}$$

$e^{-W_{n+1}}$ を得るには $p = \tilde{A}_{n+1}p_{n+1} + Q\tilde{p}$ 、ただし $p_{n+1} = Cp$, $C\tilde{A}_{n+1} = 1$、 $CQ = 0$ とおく. このとき $P(p, \phi_{n+1})$ は対角化される:

$$\exp\left[-\frac{1}{4N}\langle p_{n+1}, \frac{1}{CMC^+}p_{n+1}\rangle - \frac{1}{4N}\langle Q\tilde{p}, \frac{1}{M}Q\tilde{p}\rangle\right]$$

$C\tilde{A}_{n+1} = 1$, $CQ = 0$ で T_n は急速に減少し

$$CT_nC^+ = 0, \quad \mathcal{G}_{n+1} \circ T_n \sim \beta_{n+1}T_n, \quad (CT_n^{\circ 2}C^+)(x,y) \sim \exp[-|x-y|] \tag{35}$$

よって p のブロック毎に定数な部分 p_{n+1} が残ることを示す. また $\beta_{n+1} \gg 1$ かつ $T_n = Q\Gamma_n Q^+ > O(1)$ *on* $\mathcal{N}(C) = \{f : Cf = 0\}$, なので p の零平均揺動場 $\tilde{Q}\tilde{p}$ はほとんど存在しない.

ゆえに

$$\int \exp\left[-\frac{1}{2N}\langle(:\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}} + p), D_n(:\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}} + p)\rangle\right] P(p, \varphi_{n+1}) \prod dp \tag{36}$$

で $(Q^+\Gamma_n Q)^{-1} = E_n^\perp G_n^{-1} E_n^\perp$, さらに $E^\perp = (Q^+)^{-1}Q^+$ は $\mathcal{N}(C)$ への射影で微分作用素でもある。

ワインボトルの曲率 D_n は収束する. というのは

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{4N}\langle p, \frac{1}{M}p\rangle + \frac{1}{2N}\langle(:\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}} + p), D_n(:\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}} + p)\rangle \\ &= \frac{1}{4N}\langle p, \frac{1}{D}p\rangle + \frac{1}{N}\langle :\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}}, D_n p\rangle + \frac{1}{2N}\langle :\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}}, D_n :\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}}\rangle \\ \frac{1}{D} &= \frac{1}{M} + 2D_n \end{aligned} \tag{37a}$$

なので $p = Bp_{n+1} + Q\tilde{p}$

$$B = DC^+[CDC^+]^{-1}, \quad CQ = 0 \tag{38}$$

とおくと対角化されて

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{4N}\langle p_{n+1}, \frac{1}{CDC^+}p_{n+1}\rangle_{\Lambda_{n+1}} + \frac{1}{4N}\langle Q\tilde{p}, \frac{1}{D}Q\tilde{p}\rangle \\ &+ \frac{1}{N}\langle :\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}}, D_n(Bp_{n+1} + Q\tilde{p})\rangle + \frac{1}{2N}\langle :\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}}, D_n :\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}}\rangle \end{aligned} \tag{39}$$

その *minimizer* を $p = p^* = Bp_{n+1}^* + Q\tilde{t}^* = -2DD_n :\varphi_{n+1}^2:$

$$\begin{aligned} p_{n+1}^* &= -2CDD_n :\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}} & (40a) \\ \tilde{Q}\tilde{p}^* &= -2(E^\perp D^{-1}E^\perp)^{-1}D_n :\varphi_{n+1}^2:_{G_{n+1}} & (40b) \end{aligned}$$

よって $p = B_{n+1}(p_{n+1}^* + s) + Q(\tilde{p}^* + t)$ から

$$\begin{aligned} F(p_{n+1}, p) &= F_{min}(\phi_{n+1}) + \frac{1}{4N}\langle s, \frac{1}{CDC^+}s\rangle_{\Lambda_{n+1}} + \frac{1}{4N}\langle Qt, \frac{1}{D}Qt\rangle & (41a) \\ F_{min}(\phi_{n+1}) &= \frac{1}{2N}\langle :(A_{n+1}\phi_{n+1})^2:, \tilde{D}_{n+1} : (A_{n+1}\phi_{n+1})^2 :\rangle & (41b) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{n+1} &= D_n - 2D_nDC^+(CDC^+)^{-1}CDD_n - 2D_nE^\perp(E^\perp D^{-1}E^\perp)^{-1}E^\perp D_n \\ &= 2D_nD\frac{1}{M}DD_n + \frac{1}{M}DD_nD\frac{1}{M} \end{aligned}$$

帰納法を続けるため

$$\varphi_{n+1} = A_{n+1}\phi_{n+1} = L^2C^+\phi_{n+1} + (A_{n+1} - L^2C^+)\phi_{n+1}$$

として, ブロック毎に定数な $L^2C^+\phi_{n+1}$ が主要項をつくる。のこり $A_{n+1}-L^2C^+ = (1-E)G_nC^+G_{n+1}^{-1}$ 数値的にも小さく格子ラプラシアン G_{n+1}^{-1} が含まれ $A_{n+2} = G_{n+1}C^+G_{n+2}^{-1}$ と $T_{n+1} = G_{n+1}(1 - C^+G_{n+2}^{-1}CG_{n+1})$ を相殺する. かくして揺動場の補正は小さく
定理 **3** *(41b)* は以下の漸化式に従う

$$\begin{aligned} F_{min} &= \frac{1}{2N}\langle :\phi_{n+1}^2:, D_{n+1}:\phi_{n+1}^2:\rangle + F_{irr} && (42a) \\ D_{n+1} &= L^4[CD_nC^+ - 2L^4CD_nC^+(CDC^+)CD_nC^+] && (42b) \end{aligned}$$

ただし F_{irr} は φ_{n+1} の微分を含む *irrelevant* 項

ここで $\mathcal{G}_{n+1} \circ T_n \sim \beta_{n+1}Q\Gamma_nQ^+$ を用いた. D_{n+1} は $2CD_nC^+$ と $CM^{-1}C^+$ の調和平均で

$$D_{n+1} \le L^4(CD_nC^+)\frac{1}{CM^{-1}C^+ + 2CD_nC^+}(CM^{-1}C^+) \le \frac{L^4}{2}CM^{-1}C^+ \tag{43}$$

なので $\{D_n\}$ は $n > 1$ に一様に有界でその $D^* \sim (L^4/2)CM^{-1}C^+$ への収束が示せる.

$$\frac{L^4}{2}CM^{-1}C^+ \sim \frac{1}{2}\frac{1}{CMC^+} \sim \frac{1}{2}id \tag{44}$$

定理 **4** もし $M = M_n$ が n によらなければ D_n は正値有界作用素 $D^* \sim (1/2)(CMC^+)^{-1}$ に収束する.

3.5 繰り返し

p_{n+1} と $\tilde{Q}\tilde{p}$ の *minimizer (40a)* と *(40b)* の周りの積分は s と t のガウス積分になり *(40a)* と *(40b)* から, $|:\phi_{n+1}^2:| < \mathrm{const.}\tau_0N^{1/2}$ なので $|s| < \tau_0N^{1/2}$ かつ $|t| < \tau_0N^{1/2}$ ととれ p_{n+1} と $\tilde{Q}\tilde{p}$ のシフトと s と $\tilde{s}$ での積分は q_n, $|q(\xi)| < \tau_0N^{1/2}$ の許容変動の中にあり, s と t の積分は小さい *irrelevant* 項を与える.

重要な点は $q =: \phi_n^2 :_{G_n} - :\varphi_{n+1}^2 :_{G_{n+1}}$ が n に一様にほぼガウス積分に従う *(central limit theorem)* ことでこれから前述のステップを繰り返すことを可能にする. これは単純には以下の積分である：

$$\begin{aligned} &\int \exp\left[-\frac{g_n}{2N}\sum_{x\in\Lambda_n}(:(A_{n+1}\phi_{n+1})^2(x):_{G_{n+1}} + p_x)^2 - \frac{1}{4NL^2}\sum_{x\in\Lambda_n}p_x^2\right]\prod dp_x \\ &= \exp\left[-\frac{g_{n+1}}{2N}\sum_{x\in\Lambda_{n+1}}(:\phi_{n+1}^2(x):_{G_{n+1}})^2\right] \end{aligned}$$

ここで $(A_{n+1}\phi_{n+1})(x) = \phi_{n+1}([x/L])$、$[x/L] \in Z^2$ は $(x_1/L, x_2/L)$ に最近の格子点. つまり g_{n+1} は $2g_n$ と L^{-2} の調和平均:

$$g_{n+1} = \frac{g_n}{L^{-2} + 2g_n}$$

よって $1/g_{n+1} - 1/g^* = L^{-2}(1/g_n - 1/g^*)$, $g^* = (1 - 1/L^2)/2$. よって $g_n \to g^*$ は n について指数的に成立. この収束は安定で $(:\phi_n^2:_{G_n})^k$, $k > 3$ などがあっても成り立つ. よってスケーリン

グ領域では g_n は n によらず $\beta_0 \ll 1$ によらず $\beta_n \searrow N^{\varepsilon}$, どうような繰り返し式が g_n^D について得る.

この議論は $N^{1/2}/\beta_n > O(1)$ では実は評価上機能しない．つまりこの議論は $\beta_n > N^{1/2}$（スケーリング領域）に限定され, $\beta_n \searrow 0$ には別の $N \gg 3$ は行列式の展開と $N^{-1} : \phi_n(x)\phi_n(y) :$ を無視するためにつかわれたが $N\beta_n \gg | : \phi_n(x)\phi_n(y) : |$ であればいいようである.

4 そして

$(\phi(x)^2 - N\beta)^2$ の形の相互作用は格子ゲージでも典型的に表れ、ミレニアム問題にも応用できるであろう．ナヴィエ・ストークス方程式では適当な初期条件ではそれが発展して乱流になることが（非物理的な関数空間であるが）示されてはいる.

参考文献

[1] *T.Balaban, A low temperature expansion for classical N-vector model I, Commun.Math.Phys.,* **167** *103 (1995); Variational problems for classical N-vector model, Commun.Math.Phys.,* **175***, 607 (1996)*

[2] *J.Dimock, The Renormalization Group According Balaban, I, arXiv 1108/1335; II, arXiv:1212.5562*

[3] *J.Fröhlich and T.Spencer, The Kosterlitz-Thouless transitions in Two-Dimensional Abelian Spin Systems and the Coulomb Gas, Commun.Math.Phys.,* **81***, 527 (1981)*

[4] *K.Gawedzki and A.Kupiainen, Massless lattice ϕ_4^4 theory: Rigorous control of a renormalizable asymptotically free model, Commun.Math.Phys.* **99***, 197 (1985), and references cited therein.*

[5] *M.Hairer et al., A class of growth models rescaling to KPZ, arXiv:1512.0784*

[6] 伊東恵一, 繰り込み群の物理と数理, *SGC* ライブラリ *81 (2011),* サイエンス社

[7] *K.R.Ito, Renormalization Group Flow of 2D O(N) Spin Model with large N, Absence of Phase Transitions, Paper in Preparation*

[8] *K.R.Ito, K.R.Ito, Origin of Asymptotic Freedom in Non-Abelian Field Theories, Phys.Rev.Letters,* **58** *(1987) 439 ; Renormalization Group Flow of 2D Hierarchical Heisenberg Model of Dyson-Wilson Type, Commun. Math.Phys.* **137***(1991) 45*

[9] *A.Jaffe and E.Witten, Quantum Yang-Mills Theory, in Millennium Problems, Clay Mathematical Institute.*

[10] *A.Kupiainen, Renormalization fo Genelarized KPZ equation, arXiv:1604.0872*

Smooth approximation of a Yang–Mills theory on $\mathbb{R}^2$: a rough path approach

Hideyasu Yamashita (Aichi-Gakuin University)

Let C be the set of smooth curves $\mathsf{c}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$. Let $G=SU(n_{\mathrm{mat}})$ ($n_{\mathrm{mat}}\geq 2$), and $\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(n_{\mathrm{mat}})$), the Lie algebra of G equipped with the inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$, minus the Killing form. Let $\Omega^1=\Omega^1(\mathbb{R}^2,\mathfrak{g})$ denote the space of $\mathfrak{g}$-valued smooth 1-forms on $\mathbb{R}^2$. Let $A=A_1dx^1+A_1dx^2\in\Omega^1$ ($A_1,A_2\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathfrak{g})$). The *parallel transport* $h_{\mathsf{c},A}(t)\in G$ ($t\in\mathbb{R}$) along $\mathsf{c}\in\mathsf{C}$ is defined by the differential equation

$$\frac{dh_{\mathsf{c},A}(t)}{dt}=A\left(\dot{\mathsf{c}}(t)\right)h_{\mathsf{c},A}(t)=\sum_{k=1}^{2}A_k(\mathsf{c}(t))\dot{\mathsf{c}}_k(t)h_{\mathsf{c},A}(t),\qquad h_{\mathsf{c},A}(0)=1_G \tag{1}$$

Conjecture 1. *There exists a sequence of Ω^1-valued random variables $A^{(j)}$ ($j\in\mathbb{N}$) on a probability space $(\mathbb{P},\Omega)$, and a complete metric space $(\mathcal{G},d)$ with $\mathcal{G}\subset C(\mathbb{R},G)$ such that*

(1) $\mathbb{P}\left[h_{\mathsf{c}}:=\lim_{j\to\infty}h_{\mathsf{c},A^{(j)}}\text{ exists in }\mathcal{G}\text{ for all }\mathsf{c}\in\mathsf{C}\right]=1.$

(2) The set of G-valued random variables $\{h_{\mathsf{c}}:\mathsf{c}\in\mathsf{C},\ \mathsf{c}\text{ is a loop}\}$ obeys the law of the Wilson loops of Yang–Mills (YM) theory on $\mathbb{R}^2$ (see e.g. [1, 5, 6, 4]).

Generally a YM theory is formulated on a Riemannian manifold (mainly with dimension ≤ 4). YM on $\mathbb{R}^2$ is the simplest (and physically trivial) case of the YM theory; nevertheless, the rigorous proof of the above conjecture does not seem easy. We will give a partial result on this conjecture.

Let $\boldsymbol{\Delta}_i$ ($i\geq -1$) be the Littlewood–Paley block, and $\mathcal{M}_j:=\sum_{i\leq j-1}\boldsymbol{\Delta}_i$ be the jth 'mollification' operator on $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$, which satisfies $\lim_{j\to\infty}\mathcal{M}_ju=u$.

Let W be a $\mathfrak{g}$-valued standard Gaussian white noise on $\mathbb{R}^2$. Define the jth *smooth approximation* $W^{(j)}\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathfrak{g})$ of W by $W^{(j)}:=\mathcal{M}_jW$. Define the Ω^1-valued random variable $A^{(j)}=A_1^{(j)}dx_1+A_2^{(j)}dx_2\in\Omega^1$ ($A_1^{(j)},A_2^{(j)}\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathfrak{g})$) by

$$A_1^{(j)}(x)\equiv 0,\quad A_2^{(j)}(x):=\int_0^{x^1}W^{(j)}(\xi,x_2)d\xi,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

The condition $A_1^{(j)}(x)\equiv 0$ is called the *axial gauge condition.*

Let $C^{p\text{-var}}([s,t],G^2(\mathbb{R}^d))$ ($p\in(2,3)$) denote the space of p-variation weak geometric rough paths. For $x\in C^{1\text{-var}}([s,t],\mathbb{R}^d)$ (the space of continuous functions of bounded variation), let $S_2(x)\in C^{p\text{-var}}([s,t],G^2(\mathbb{R}^d))$ be the step-2 canonical lift of x (see [3, 2]).

Definition 2. Let $V:\mathbb{R}^e\to L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)$. Let $(x^{(n)})_n$ be a sequence in $C^\infty([0,T],\mathbb{R}^d)$. $y\in C([0,T],\mathbb{R}^e)$ is called a *FV solution* of the (formal) ODE

$$dy=V(y)dx^{(\cdot)},\quad y(0)=y_0\in\mathbb{R}^e \tag{2}$$

if the limit

$$\lim_{n\to\infty}S_2(x^{(n)})=:\mathbf{x}\in C^{p\text{-var}}([0,T],G^2(\mathbb{R}^d))$$

exists, and y is a solution of the rough differential equation (RDE)

$$dy=V(y)d\mathbf{x},\quad y(0)=y_0\in\mathbb{R}^e$$

in the Friz–Victoir (FV) sense [3, Def. 10.17]. If the solution is unique we write $y=\Pi_{(V)}((x^{(n)}),y_0)$.

We see Eq. (1) is rewritten as

$$dh_{\mathsf{c},A} = V(h_{\mathsf{c},A})dX, \quad h_{\mathsf{c},A}(0) = 1_G \in G, \quad X(t) = X_{\mathsf{c},A}(t) := \int_{\mathsf{c}\restriction[0,t]} A.$$

where $V(M)$ ($M \in \mathrm{Mat}(n_{\mathrm{mat}}, \mathbb{C})$) is the linear operator on $\mathrm{Mat}(n_{\mathrm{mat}}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n_{\mathrm{mat}}^2}$ defined by $V(M)N := NM$, $N \in \mathrm{Mat}(n_{\mathrm{mat}}, \mathbb{C})$.

Let $\mathsf{C}_{\mathrm{nice}} \subset \mathsf{C}$ be a set of 'well-behaved' curves in C (roughly speaking, the curve $\mathsf{c} \in \mathsf{C}_{\mathrm{nice}}$ does not rotate around a point in $\mathbb{R}^2$ infinitely many times). Let $X_{\mathsf{c}}^{(j)} := X_{\mathsf{c},A^{(j)}}$ and $\mathbf{X}_{\mathsf{c}}^{(j)} = (1, X_{\mathsf{c}}^{(j)}, \mathbb{X}_{\mathsf{c}}^{(j)}) := S_2(X_{\mathsf{c}}^{(j)})$.

Lemma 3 (rough path convergence in L^p)**.** *Let $\alpha = 1/p \in (1/3, 1/2)$ and $q \in [1, \infty)$. Suppose $\mathsf{c} \in \mathsf{C}_{\mathrm{nice}}$. Then there exists $\mathbf{X}_{\mathsf{c}} \in C^{\alpha\text{-Höl}}([0,T], G^2(\mathfrak{g}))$ such that $\mathbf{X}_{\mathsf{c}}^{(j)} \to \mathbf{X}_{\mathsf{c}}$ in $C^{\alpha\text{-Höl}}([0,T], G^2(\mathfrak{g}))$ and $L^q(\mathbb{P})$, i.e.*

$$\lim_{j\to\infty} \left\| d_{\mathrm{CC},\alpha\text{-Höl};[0,T]}(\mathbf{X}_{\mathsf{c}}, \mathbf{X}_{\mathsf{c}}^{(j)}) \right\|_{L^q(\mathbb{P})} = 0,$$

where $d_{\mathrm{CC},\alpha\text{-Höl};[0,T]}$ denotes the canonical metric on $C^{\alpha\text{-Höl}}([0,T], G^2(\mathfrak{g}))$ (α-Hölder Carnot–Carathéodory metric).

Theorem 4. *There exists a subsequence $\left(A^{(j_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ of $\left(A^{(j)}\right)_j$ such that for any finite subset $S \subset \mathsf{C}_{\mathrm{nice}}$*

(i) $\mathbb{P}\left[h_{\mathsf{c}} := \Pi_{(V)}((X_{\mathsf{c}}^{(j_n)})_n, 1_G) \text{ exists for all } \mathsf{c} \in S\right] = 1,$

(ii) The set of G-valued random variables $\{h_{\mathsf{c}} : \mathsf{c} \in S,\ \mathsf{c} \text{ is a loop}\}$ obeys the law of the Wilson loops of YM theory on $\mathbb{R}^2$.

References

[1] B. K. Driver. YM$_2$: Continuum expectations, lattice convergence, and lassos. *Commun. Math. Phys.*, 123:575–616, 1989.

[2] P. Friz and M. Hairer. *A Course on Rough Paths*. Springer, Berlin, 2014.

[3] P. Friz and N. Victoir. *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[4] T. Lévy. *The Yang-Mills measure for compact surfaces*, American Mathematical Society, Providence, 2003.

[5] A. Sengupta. The Yang–Mills measure for S^2. *J. Funct. Anal.*, 108:231–273, 1992.

[6] A. Sengupta. *Gauge Theory on Compact Surfaces*, American Mathematical Society, Providence, 1997.

Malliavin calculus for conditional intensities of Hawkes processes

竹内 敦司 *

（大阪市立大学大学院理学研究科）

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし，$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ とおく．$\{\tau_k\,; k \geq 1\}$ は $\tau_k < \tau_{k+1}$ a.s. を満たす simple point process とし，対応する counting process を

$$\left\{ N_t = \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{(0,t]}(\tau_k)\,; t \geq 0 \right\}$$

で表す．次に，$\{Z_k\,; k \geq 1\}$ は独立で同分布に従う $\mathbb{R}_0$-値確率変数列で，$\{N_t\,; t \geq 0\}$ と独立であり，その密度関数 $f(z) := \mathbb{P}[Z_1 \in \mathrm{d}z]/\mathrm{d}z$ は滑らかで，$\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$ を満たすものとする．marked point process $\big\{(\tau_k, Z_k)\,; k \geq 1\big\}$ に対応する marked counting process を

$$\left\{ L\big((0,t], A\big) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{(0,t]}(\tau_k)\,\mathbb{I}_A(Z_k)\,; t \geq 0,\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_0) \right\}$$

で表す．このとき，$\big\{L\big((0,t], A\big)\,; t \geq 0,\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_0)\big\}$ の conditional intensity $\big\{\lambda(t, A)\,; t \geq 0,\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_0)\big\}$ が

$$\lambda(t, A) = \pi(A) + \sum_{k \geq 1} h(t - \tau_k)\,\mathbb{I}_{(0,t]}(\tau_k)\,\mathbb{I}_A(Z_k) \tag{1}$$
$$\left(=: \pi(A) + \int_0^t \int_A h(t-s)\, L(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) \right)$$

を満たすとき，$\big\{L\big((0,t], A\big)\,; t \geq 0,\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_0)\big\}$ は (marked) Hawkes process と呼ばれる．ただし，$\pi(\mathrm{d}z)$ は $\mathbb{R}_0$ 上の有限測度とし，$h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ は有界可測関数で，

$$\|h\|_1 \left(:= \int_0^{+\infty} h(s)\,\mathrm{d}s \right) < 1 \tag{2}$$

*E-mail address: takeuchi@sci.osaka-cu.ac.jp

を満たすものとする．さらに，関数 $\ell \in C_b^1\big(\mathbb{R}_0\,;[0,+\infty)\big)$ に対して，

$$L_t = \sum_{k\geq 1} \ell(Z_k)\,\mathbb{I}_{(0,t]}(\tau_k) \left(=: \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \ell(z)\,L(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) \right), \tag{3}$$

$$\lambda_t = \int_{\mathbb{R}_0} \ell(z)\,\lambda(t,\mathrm{d}z) \tag{4}$$

で定まる確率過程 $\{L_t\,;t\geq 0\}$，$\{\lambda_t\,;t\geq 0\}$ を考える．$\mu = \int_{\mathbb{R}_0} \ell(z)\,\pi(\mathrm{d}z)$ とおくと，(1) より

$$\lambda_t = \mu + \sum_{k\geq 1} h(t-\tau_k)\,\ell(Z_k)\,\mathbb{I}_{(0,t]}(\tau_k) \tag{5}$$

$$\left(= \mu + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} h(t-s)\,\ell(z)\,L(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) \right)$$

を得る．

本講演では，確率過程 $\{\lambda_t\,;t\geq 0\}$ に対して Malliavin 解析を適用し，$\{N_t\geq 1\}$ の下での部分積分公式について考察する．ジャンプ型確率過程に対する Malliavin 解析には，Bismut の方法（Girsanov 変換によるアプローチ）や Picard の方法（差分作用素を用いた方法）など，目的に応じた幾つかの方法がよく知られているが，本講演では，ジャンプの大きさを表す確率変数列 $\{Z_k\,;k\geq 1\}$ に注目した解析に焦点を当てて考えることにする．

定理 1 $T>0$ とし，条件 (2) と以下の三つの条件が成り立つとする：

(i) $\ell'(0)=0$,

(ii) コンパクト集合 $K\subset\mathbb{R}_0$ および定数 $C_1>0$ が存在して，$\inf_{z\in K}\left|\ell'(z)\right|\geq C_1$,

(iii) 定数 $C_2>0$ が存在して，$\inf_{t\in[0,T]} h(t)\geq C_2$.

このとき $0<t\leq T$ および $\phi\in C_b^1(\mathbb{R})$ に対して，次の等式が成り立つ：

$$\mathbb{E}\big[\phi'(\lambda_t)\,\mathbb{I}(N_t\geq 1)\big] = \mathbb{E}\big[\phi(\lambda_t)\,\Theta_t\,\mathbb{I}(N_t\geq 1)\big], \tag{6}$$

$$\Theta_t = -\sum_{j=1}^{N_t} \frac{1}{f(Z_j)}\,\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{h(t-\tau_j)\,\ell'(z_j)\,f(z_j)}{\sum_{k\neq j} h(t-\tau_k)^2\,\ell'(Z_k)^2 + h(t-\tau_j)^2\,\ell'(z_j)^2} \right)\Bigg|_{z_j=Z_j}. \tag{7}$$

□

さらに定理 1 を用いた幾つかの応用例について，講演の中で紹介する予定である．

References

[1] P. Brémaud, G. Nappo and G. L. Torrisi: *J. Appl. Probab.* **39** (2002).

[2] A. G. Hawkes: *Biometrika* **58** (1971).

[3] T. Jaisson and M. Rosenbaum: *Ann. Appl. Probab.* **25** (2015).

On the Euler-Maruyama scheme for SDEs with discontinuous diffusion coefficient

Dai Taguchi (Ritsumeikan University)
joint work with
Hoang-Long Ngo (Hanoi National University of Education)

Abstract

In this talk, we consider the strong rate of convergence for the Euler-Maruyama scheme of a class of stochastic differential equations whose diffusion coefficient is discontinuous.

Euler-Maruyama scheme

Let $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ be the solution of the one-dimensional stochastic differential equation (SDE)

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s,\ x_0 \in \mathbb{R},\ t \in [0,T], \tag{1}$$

where $W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$ is a standard Brownian motion defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with a filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ satisfying the usual conditions.

The solution of (1) is rarely analytically tractable, so one often approximates X by using the Euler-Maruyama approximation $X^{(n)} = (X_t^{(n)})_{0 \leq t \leq T}$ given by

$$X_t^{(n)} = x_0 + \int_0^t \sigma(X_{\eta_n(s)}^{(n)}) dW_s,\ t \in [0,T],$$

where $\eta_n(s) = kT/n$ if $s \in [kT/n, (k+1)T/n)$. It is well-known that if σ is Lipschitz continuous, the Euler-Maruyama approximation for (1) converges at the strong rate of order $1/2$, that is, there exists $C > 0$ such that

$$\mathbb{E}[|X_T - X_T^{(n)}|] \leq \frac{C}{n^{1/2}}.$$

The strong rate in the case of non-Lipschitz coefficient has been studied recently. Gyöngy and Rásonyi [1] prove that if σ is α-Hölder continuous with $\alpha \in [1/2, 1]$, then there exists $C > 0$ such that

$$\mathbb{E}[|X_T - X_T^{(n)}|] \leq \begin{cases} \dfrac{C}{n^{\alpha - 1/2}} & \text{if } \alpha \in (1/2, 1], \\ \dfrac{C}{\log n} & \text{if } \alpha = 1/2. \end{cases}$$

These results still hold for the SDE with discontinuous drift coefficient ([3]).

SDE with discontinuous diffusion coefficient

In this talk, we assume that the diffusion coefficient σ satisfies the following condition:

$$\sigma := \rho \circ f,$$

where ρ is 1/2-Hölder continuous and there exists $0 < \underline{\rho} < \overline{\rho}$ such that

$$\underline{\rho} \leq \rho(x) \leq \overline{\rho},$$

and $f = f_1 - f_2$, f_1 and f_2 are bounded, strictly increasing with finite discontinuous points. Note that under the above assumption, the SDE (1) has a unique strong solution, (see [2]).

In this talk, under the above assumption for the diffusion coefficient σ, we will show that the Euler-Maruyama approximation $X^{(n)}$ converges to the unique solution to the corresponding SDE in L^1-sense with the rate $\log n$, that is there exists $C > 0$ such that for any $n \geq 2$,

$$\mathbb{E}[|X_T - X_T^{(n)}|] \leq \frac{C}{\log n}.$$

The idea of proof is to use the "tightness" and some estimations of the local time of the Euler-Maruyama approximation.

References

[1] Gyöngy, I. and Rásonyi, M.: A note on Euler approximations for SDEs with Hölder continuous diffusion coefficients. Stochastic. Process. Appl. 121, 2189–2200 (2011).

[2] Le Gall, JF.: One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process. In Stochastic analysis and applications 1984 (pp. 51-82). Springer Berlin Heidelberg.

[3] Ngo, H-L., and Taguchi, D.: Strong rate of convergence for the Euler-Maruyama approximation of stochastic differential equations with irregular coefficients. Math. Comp. 85(300), 1793–1819 (2016).

[4] Ngo, H-L., and Taguchi, D.: Strong convergence for the Euler-Maruyama approximation of stochastic differential equations with discontinuous coefficients. Preprint, arXiv:1604.01174v2.

Stochastic complex Ginzburg-Landau equation with space-time white noise *

Nobuaki Naganuma (Osaka University)

In this talk, we prove local well-posedness of the stochastic complex Ginzburg-Landau equation with a complex-valued space-time white noise ξ in the three-dimensional torus $\mathbf{T}^3 = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^3$

$$\text{(CGLE)} \qquad \begin{cases} \quad \partial_t u = (\mathsf{i} + \mu)\triangle u + \nu(1 - |u|^2)u + \xi & \text{on } (0,\infty) \times \mathbf{T}^3, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot). \end{cases}$$

Here, $\mathsf{i} = \sqrt{-1}$, μ is a positive constant and ν is a complex constant.

Before starting our discussion, we introduce notation. We denote by $\mathcal{D}$ the space of all smooth functions on $\mathbf{T}^3$ and by $\mathcal{D}'$ its dual. For every $\alpha \in \mathbf{R}$, $1 \le p, q \le \infty$, we denote by $\mathcal{B}^\alpha_{p,q}$ the Besov space, which is defined by the completion of the space of smooth functions on $\mathbf{T}^3$ under the Besov norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^\alpha_{p,q}}$. To define the Besov norm, we use the Littlewood-Paley block $\{\triangle_m = \mathcal{F}^{-1}\rho_m\mathcal{F}\}_{m=-1}^\infty$, where $\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}^{-1}$ are the Fourier transformation and its inverse, respectively, and $\{\rho_m\}_{m=-1}^\infty$ is the dyadic partition of unity. For notational simplicity, we set the Hölder-Besov space $\mathcal{C}^\alpha = \mathcal{B}^\alpha_{\infty,\infty}$ and denote by $C_T\mathcal{C}^\alpha$ the space of all $\mathcal{C}^\alpha$-valued continuous functions on $[0,T]$ for every $T > 0$. Next we introduce the notion of paradifferential calculus. For every $f \in \mathcal{C}^\alpha$ and $g \in \mathcal{C}^\beta$, we define the resonance $f \odot g$ and the praproduct $f \otimes g$. They give the decomposition $fg = f \otimes g + f \odot g + f \otimes g$. The paraproduct $f \otimes g$ can be defined for any $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, but the resonance $f \odot g$ can be defined for $\alpha + \beta > 0$. Hence, in order define products fg, it is necessary that $\alpha + \beta > 0$ holds. Finally, we set $\mathcal{L}^1 = \partial_t - \{(\mathsf{i} + \mu)\triangle - 1\}$, $P^1_t = e^{t\{(\mathsf{i}+\mu)\triangle - 1\}}$ and $I(u)_t = \int_{-\infty}^t P^1_{t-s} u_s \, ds$ for $u : [0,\infty) \to \mathcal{D}'$.

Now we return to well-posedness of the equation (CGLE). For some reason, we write (CGLE) as $\mathcal{L}^1 u = \nu(1 - |u|^2)u + u + \xi$ and discuss the problem. To illustrate difficulty of this problem, we consider a stationary solution to the linear equation $\mathcal{L}^1 Z = \xi$ on $(0,\infty) \times \mathbf{T}^3$. The solution is given by $Z_t = I(\xi)_t$ formally and it is not a function but a distribution with respect to the space variable in the dimension three. More precisely, Z_t belongs $\mathcal{C}^{-\frac{1}{2}-\kappa}$ for any $\kappa > 0$. Hence the products Z_t^2, $Z_t\overline{Z_t}$, $Z_t^2\overline{Z_t}$ and so on are not defined a priori. Since the irregularity of the solution to (CGLE) comes from the white-noise, it is natural to guess that the space regularity of u_t is not better than that of Z_t and that the product $|u_t|^2 u_t = u_t^2\overline{u_t}$ is not defined a priori.

To overcome this difficulty, we use the theory of paracontrolled distributions developed in [GIP15]. The method consists a deterministic part and a probabilistic part.

*This talk is based on a joint work with Masato Hoshino (The University of Tokyo) and Yuzuru Inahama (Kyushu University)

In the deterministic part, we construct the solution map of (CGLE) from the space $\mathcal{X}^{\kappa}_{T_*}$ of driving vectors to the space $\mathcal{D}^{\kappa,\kappa'}_{T_*}$ of solutions, where T_* is a life time of a solution and κ, κ' are positive small parameters, and show that the solution map is continuous. To be precise, for every $0 < \kappa < \kappa' < 1/18$ and $T > 0$, we call a vector of space-time distributions

$$X = (X^{\mathsf{I}}, X^{\mathsf{V}}, X^{\mathsf{V}^\circ}, X^{\mathsf{Y}}, X^{\mathsf{Y}^\circ}, X^{\mathsf{\Psi}^\circ}, \dots)$$
$$\in C_T\mathcal{C}^{-\frac{1}{2}-\kappa} \times (C_T\mathcal{C}^{-1-\kappa})^2 \times (C_T\mathcal{C}^{1-\kappa})^2 \times \mathcal{L}_T^{\frac{1}{2}-\kappa,\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\kappa} \times (C_T\mathcal{C}^{-\kappa})^6 \times (C_T\mathcal{C}^{-\frac{1}{2}-\kappa})^2$$

which satisfies $\mathcal{L}^1 X^{\mathsf{Y}} = X^{\mathsf{V}}$ and $\mathcal{L}^1 X^{\mathsf{Y}^\circ} = X^{\mathsf{V}^\circ}$ a *driving vector* of (CGLE). We denote by $\mathcal{X}^{\kappa}_T$ the set of all driving vector. The definition of $\mathcal{D}^{\kappa,\kappa'}_{T_*}$ is a little complicated. Because we transform (CGLE) to a system of two equations with respect to (v, w) so that $u = X^{\mathsf{I}} - \nu X^{\mathsf{\Psi}^\circ} + v + w$ solves (CGLE). The space $\mathcal{D}^{\kappa,\kappa'}_{T_*}$ is where (v, w) lives.

We explain the meanings of the graphical symbols I, V, V°, Y,.... They are just coordinates mathematically; however, the dot and the line are icons for the white noise and the operation I, respectively. Hence, I represents $I(\xi) = Z$. Moreover, I° and V° are icons for the complex conjugate of Z and the product $Z\overline{Z}$, respectively. So $\mathsf{\Psi}^\circ$ means $I(Z^2\overline{Z})$. Finally, $\smile$ denotes the resonance term; $\mathsf{\Psi}^\circ\smile\mathsf{I}$ represents $I(Z^2\overline{Z}) \odot Z$.

In the probabilistic part, we construct a driving vector X^ϵ from a smeared noise ξ^ϵ with a parameter $0 < \epsilon < 1$ and show convergence of X^ϵ as $\epsilon \downarrow 0$. Of course, we assume that $\xi^\epsilon \to \xi$ as $\epsilon \downarrow 0$. More precisely, we set $X^{\epsilon,\mathsf{I}} = Z^\epsilon = I(\xi^\epsilon)_t$, $X^{\epsilon,\mathsf{I}^\circ} = \overline{Z^\epsilon}$ and $X^{\epsilon,\mathsf{V}} = (Z^\epsilon)^2$; however, since $\mathfrak{c}^\epsilon_1 = \boldsymbol{E}[Z^\epsilon_t\overline{Z^\epsilon_t}]$ diverges as $\epsilon \downarrow 0$, we need to consider renormalization and set $X^{\epsilon,\mathsf{V}^\circ} = Z^\epsilon\overline{Z^\epsilon} - \mathfrak{c}^\epsilon_1$. In order to define $X^{\epsilon,\tau}$ for $\mathsf{\Psi}^\circ$, ..., it is necessary to consider renormalization. The other renormalization constants are $\mathfrak{c}^\epsilon_{2,1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}[X^{\epsilon,\mathsf{Y}}_{(t,x)} \odot X^{\epsilon,\mathsf{V}^{\circ\circ}}_{(t,x)}]$ and $\mathfrak{c}^\epsilon_{2,2} = \boldsymbol{E}[X^{\epsilon,\mathsf{Y}^\circ}_{(t,x)} \odot X^{\epsilon,\mathsf{V}^\circ}_{(t,x)}]$. To show convergence of X^ϵ, we express $\triangle_m X^\tau$ by the Itô-Wiener integrals and estimate their kernels.

From the discussion above, we obtain our main result:

Theorem 1. *Set* $\mathfrak{c}^\epsilon = 2(\mathfrak{c}^\epsilon_1 - \overline{\nu}\overline{\mathfrak{c}^\epsilon_{2,1}} - 2\nu\mathfrak{c}^\epsilon_{2,2})$. *Let* $u_0 \in \mathcal{C}^{-\frac{2}{3}+\kappa'}$. *Consider the renormalized equation*

$$\text{(CGLE')} \qquad \begin{cases} \partial_t u^\epsilon = (\mathrm{i} + \mu)\triangle u^\epsilon + \nu(1 - |u^\epsilon|^2)u^\epsilon + \nu\mathfrak{c}^\epsilon u^\epsilon + \xi^\epsilon, & \text{on } (0,\infty) \times \mathbf{T}^3, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot). \end{cases}$$

Then $\mathfrak{c}^\epsilon \to \infty$ *as* $\epsilon \downarrow 0$ *and there exists a unique process* u^ϵ *and a random time* T^ϵ_* *such that*

- u^ϵ *solves* (CGLE') *on* $[0, T^\epsilon_*) \times \mathbf{T}^3$,
- T^ϵ_* *converges to some a.s. positive random time* T_* *in probability,*
- u^ϵ *converges to some process* u *defined on* $[0, T_*) \times \mathbf{T}^3$ *in the sense that* $u^\epsilon \to u$ *in probability in* $C_t\mathcal{C}^{-\frac{3}{2}+\kappa'}$ *for every* $0 < t < T_*$. *Furthermore,* u *is independent to the choice of* ξ^ϵ.

References

[GIP15] Massimiliano Gubinelli, Peter Imkeller, and Nicolas Perkowski. Paracontrolled distributions and singular PDEs. *Forum Math. Pi*, 3:e6, 75, 2015.

GLOBAL WELL-POSEDNESS OF SINGULAR STOCHASTIC PDES

MASATO HOSHINO (THE UNIVERSITY OF TOKYO)

We discuss global-in-time existence of the solution of semilinear stochastic PDE of the type

$$\mathcal{L}u = F(u, \nabla u) + \xi, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{T}^d,$$

where $\mathcal{L}$ is a parabolic operator, F is a nonlinear operator, and ξ is a space-time white noise on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d$. The main difficulty of this equation is that the nonlinear operator F is not well defined in general because we expect that $u(t, \cdot) \in \mathcal{C}^{\frac{2-d}{2}-}$. Recently, Gubinelli-Imkeller-Perkowski introduced the *paracontrolled calculus* as a tool of giving a meaning to this equation under some assumptions. They solved some singular stochastic PDEs locally in time in the following sense. We replace ξ by a smooth noise ξ^ϵ which approximate ξ in $\epsilon \downarrow 0$ and consider the solution u^ϵ of

$$\mathcal{L}u^\epsilon = M^\epsilon F(u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) + \xi^\epsilon,$$

where M^ϵ is a suitable *renormalization* of F. Then u^ϵ converges to a universal limit u in a short time. However, global-in-time existence is not known in general. We discuss this problem for the following two examples.

First example is the coupled KPZ equation

$$\partial_t h^\alpha = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 h^\alpha + \tfrac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\partial_x h^\beta \partial_x h^\gamma + \xi^\alpha, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{T}$$

for an $\mathbb{R}^d$-valued process $h = (h^\alpha)_{\alpha=1}^d$. Here $(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})_{1\le\alpha,\beta,\gamma\le d}$ are given constants and $\xi = (\xi^\alpha)$ is an $\mathbb{R}^d$-valued space-time white noise. This is a joint work with Tadahisa Funaki (The University of Tokyo).

Theorem 1. *Let $\xi^\epsilon(t,x) = (\xi(t) * \rho^\epsilon)(x)$ be a smeared noise with an even mollifier $\rho^\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\rho(\epsilon^{-1}x)$. Then there exist constants $C^{\epsilon,\beta\gamma} = O(\epsilon^{-1})$ such that the solution h^ϵ of*

$$\partial_t h^{\epsilon,\alpha} = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 h^{\epsilon,\alpha} + \tfrac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\partial_x h^{\epsilon,\beta}\partial_x h^{\epsilon,\gamma} - C^{\epsilon,\beta\gamma}) + \xi^{\epsilon,\alpha}$$

converges to a universal limit h in a short time.

Furthermore, if we assume that

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}$$

for all α, β, γ, then there exists a μ-full set H such that the limit h starting at h_0 with $\partial_x h_0 \in H$ exists globally in time. Here μ is the distribution of an $\mathbb{R}^d$-valued spatial white noise on $\mathbb{T}$.

Second example is the complex Ginzburg-Landau equation

$$\partial_t u = (i+\mu)\Delta u + \nu(1-|u|^2)u + \xi, \quad t>0,\ x\in\mathbb{T}^3$$

for a complex-valued process u. Here $\mu > 0$, $\nu \in \mathbb{C}$, and ξ is a complex space-time white noise. This is a joint work with Yuzuru Inahama (Kyushu University) and Nobuaki Naganuma (Osaka University).

Theorem 2. *Let $\xi^\epsilon(t,x) = (\xi(t) * \rho^\epsilon)(x)$ be a smeared noise with a mollifier $\rho^\epsilon(x) = \epsilon^{-3}\rho(\epsilon^{-1}x)$. Then there exists a constant $C^\epsilon = O(\epsilon^{-1})$ such that the solution u^ϵ of*

$$\partial_t u^\epsilon = (i+\mu)\Delta u^\epsilon + \nu(1-|u^\epsilon|^2 + C^\epsilon)u^\epsilon + \xi^\epsilon$$

converges to a universal limit u in a short time

Furthermore, if $\mu > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ and $\Re\nu > 0$, then the limit u exists globally in time for all initial values $u_0 \in \mathcal{C}^{-2/3+}$.

Integrated version of Varadhan's asymptotics for lower order perturbations of strong local Dirichlet forms[*1]
(松浦浩平氏（東北大学）との共同研究)

日野 正訓 （京都大学）

σ-有限測度空間 $(E, \mathcal{B}, \mu)$ 上に定まる強局所対称 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}^0, \mathbb{D})$ に対して，対応する Markov 半群 $\{T_t^0\}$ の積分型 Varadhan 評価が常に成り立つ [3, 2, 1]:

定理 1 $A, B \in \mathcal{B}$, $\mu(A), \mu(B) \in (0, \infty)$ のとき，$P_t^0(A, B) = \int_A T_t^0 \mathbf{1}_B \, d\mu$ とおくと，

$$\lim_{t \to 0} t \log P_t^0(A, B) = -\frac{\mathsf{d}(A, B)^2}{2}.$$

ここで $\mathsf{d}(A, B)$ は A, B 間の内在的距離で，$(\mathcal{E}^0, \mathbb{D})$ から直接定まる量である．本講演では，強局所対称 Dirichlet 形式に低階の摂動項を付け加えたとき，同様の評価が成り立つための十分条件を与える．

以下，設定と結果を述べる．H を実可分 Hilbert 空間，D を $L^2(E, \mu)$ から $L^2(E \to H, \mu)$ への，定義域を $\mathbb{D}$ とする閉作用素で，連鎖律をみたすものとする．すなわち，$f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathbb{D}$ と $F \in C^1(\mathbb{R}^m)$ で 1 階偏導関数がすべて有界かつ $F(0) = 0$ となるものに対して，$F(f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{D}$ であり $D\big(F(f_1, \ldots, f_m)\big) = \sum_{j=1}^m (\partial_j F)(f_1, \ldots, f_m) DF_j$. さて，$f, g \in \mathbb{D}$ に対して

$$\mathcal{E}^0(f, g) = \frac{1}{2} \int_E (Df, Dg)_H \, d\mu$$

と定めると，これは $L^2(E, \mu)$ 上の強局所 Dirichlet 形式となる．$A \in \mathcal{B}$ に対して以下のように定める．

$$\mathbb{D}_A = \{f \in \mathbb{D} \mid f = 0 \ \mu\text{-a.e. on } E \setminus A\}, \quad \mathbb{D}_{A,b} = \mathbb{D}_A \cap L^\infty(\mu).$$

定義 2（cf. [1]） 増大可測集合列 $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ が以下の条件をみたすとき measurable nest という．

(i) 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し，E_k 上で $h_k \geq 1$ μ-a.e. となる $h_k \in \mathbb{D}$ が存在する．
(ii) $\bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{D}_{E_k}$ は $\mathbb{D}$ で稠密．ここで $\mathbb{D}$ には内積 $\mathcal{E}^0(f, g) + (f, g)_{L^2(\mu)}$ から定まる位相を入れる．

さらに，measurable nest $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ と $p \in [1, \infty]$ に対して以下のように定める．

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\mu, \{E_k\}) = \{f \in L^0(\mu) \mid \text{すべての } k \in \mathbb{N} \text{ に対して } f\mathbf{1}_{E_k} \in L^p(\mu)\},$$
$$\mathbb{D}_{\mathrm{loc},b}(\{E_k\}) = \{f \in L^\infty(\mu) \mid \{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{D} \text{ が存在して，各 } k \in \mathbb{N} \text{ に対して } f = f_k \ \mu\text{-a.e. on } E_k\},$$
$$\mathbb{D}_0(\{E_k\}) = \big\{f \in \mathbb{D}_{\mathrm{loc},b}(\{E_k\}) \bigm| |Df|_H \leq 1 \ \mu\text{-a.e.}\big\}.$$

このとき，関数空間 $\mathbb{D}_0(\{E_k\})$ は $\{E_k\}$ の取り方によらない（[1, Proposition 3.9]）ため，これを単に $\mathbb{D}_0$ で表す．測度正の集合 $A, B \in \mathcal{B}$ に対して内在的距離を以下のように定める．

$$\mathsf{d}(A, B) = \sup_{f \in \mathbb{D}_0} \left\{ \operatorname*{ess\,inf}_{x \in A} f(x) - \operatorname*{ess\,sup}_{x \in B} f(x) \right\} \in [0, \infty].$$

さて，b, c を E 上の H-値可測関数，V を E 上の実数値可測関数とし，以下を仮定する．

(A.1) measurable nest $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ が存在して $|b|_H, |c|_H \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu, \{E_k\})$, $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu, \{E_k\})$.

*1 本研究は JSPS 科研費 JP15H03625 の助成を受けたものです．

(A.2) $\eta \in [0,1)$, $\theta \ge 0$, $\omega \ge 0$, $l \ge 0$ が存在して，任意の $f, g \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k,b}$ に対して

$$-\int_E \{(b+c, Df)_H f + Vf^2\}\, d\mu \le \eta \mathcal{E}^0(f,f) + \theta \|f\|_2^2,$$

$$\left| \int_E \big\{(b, Df)_H g + (c, Dg)_H f + Vfg\big\}\, d\mu \right| \le \omega \mathcal{E}_l^0(f,f)^{1/2} \mathcal{E}_l^0(g,g)^{1/2}.$$

ここで $\mathcal{E}_l^0(f,f) = \mathcal{E}^0(f,f) + l\|f\|_{L^2(\mu)}^2$. 双線形形式 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E}(f,g) = \mathcal{E}^0(f,g) + \int_E \big\{(b, Df)_H g + (c, Dg)_H f + Vfg\big\}\, d\mu, \quad f, g \in \textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k,b}$$

と定めると，これは $(\mathcal{E}, \mathbb{D})$ 上の双線形形式に自然に拡張され，L^2 強連続半群 $\{T_t\}$ が対応する．$\{T_t\}$ は正値保存性を持つが，一般に Markov 性を持つとは限らない．$A \in \mathcal{B}$ かつ $0 < \mu(A) < \infty$ となる A の全体を $\mathcal{B}_0$ とし，$A, B \in \mathcal{B}_0$ に対して $P_t(A,B) = \int_A T_t \mathbf{1}_B\, d\mu$ と定める．以下が主定理である．

定理 3 (A.1), (A.2) に加え，更に以下を仮定する．

(B.1) ある $\kappa > 0$ に対して

$$\left| \int_E (b-c, Df)_H f\, d\mu \right| \le \kappa \mathcal{E}_1^0(f,f), \quad f \in \textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k,b}.$$

(B.2) ある $\gamma \ge 0$ と $\{\lambda_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset [0,\infty)$ が存在して，$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\lambda_\varepsilon = 0$ かつ以下をみたす：任意の $\varepsilon > 0$ と $\|f\|_2 = 1$ なる $f \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}_{E_k,b}$ に対して，

$$\int_E |b-c|_H f^2\, d\mu \le \varepsilon \mathcal{E}^0(f) + \lambda_\varepsilon + \gamma \Big(\int_E f^2 \log^+ f^2\, d\mu \Big)^{1/2}.$$

このとき，

$$\varlimsup_{t\to 0} t \log P_t(A,B) \le -\frac{\mathsf{d}(A,B)^2}{2}, \quad A, B \in \mathcal{B}_0. \tag{1}$$

定理 4 (A.1), (A.2) に加え，(1) が成り立つとする．このとき，

$$\varliminf_{t\to 0} t \log P_t(A,B) \ge -\frac{\mathsf{d}(A,B)^2}{2}, \quad A, B \in \mathcal{B}_0. \tag{2}$$

(B.2) の分かりやすい十分条件と典型例は講演中に与える．定理 3 の証明は Davies–Gaffney の議論の修正，定理 4 の証明は [1] の議論の修正に基づく．(B.2) の式の右辺で対数項を許しているところがポイントで，b, c に関する制約条件が弱くなる一方，定理 3 の証明には L^p-analysis を必要とする．特に，以下の命題が一つの鍵となる．

命題 5 (A.1), (A.2), (B.1) の仮定のもと，$q = \frac{\kappa+2+\sqrt{\kappa^2+4(1-\eta)}}{\kappa+\eta}$ (> 2), $q' = q/(q-1)$ とすると，$p \in [q', q]$ のとき $\{T_t|_{L^2(\mu)\cap L^p(\mu)}\}$ は $L^p(\mu)$ 上の強連続半群に拡張される．

条件 (B.2) と定理 3, 4 の主張は更に「局所化」することもできる．時間があれば講演中に説明する．

参考文献

[1] Ariyoshi, T. and Hino, M., Small-time asymptotic estimate in local Dirichlet spaces, Electron. J. Probab. **10** (2005), 1236–1259.

[2] Hino, M. and Ramírez, J. A., Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups, Ann. Probab. **14** (2003), 1254–1295.

[3] Ramírez, J. A., Short time asymptotics in Dirichlet spaces, Comm. Pure Appl. Math **54** (2001), 259–293.