2 次 Wiener 汎関数について

谷口説男 (九州大学基幹教育院)

本講演では，いくつかの 2 次 Wiener 汎関数の例を振り返ったのち，新たな具体例について報告する．

$(\mathcal{W},\mathcal{H},\mu)$ を抽象 Wiener 空間，すなわち，実可分 Banach 空間 $\mathcal{W}$，$\mathcal{W}$ に連続かつ稠密に埋め込める実可分 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$，および $\mathcal{W}$ 上の次のような特性関数を持つ Gauss 測度 μ の三つ組とする．

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\ell(w)}\mu(dw)=e^{-\frac{1}{2}\|\ell\|_{\mathcal{H}}^2}\quad(\forall\ell\in\mathcal{W}^*\subset\mathcal{H}^*=\mathcal{H}).$$

ただし，$\mathcal{W}^*$ は $\mathcal{W}$ の双対空間であり，$\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のノルムである．$\mathcal{H}^{\otimes n}$ を $\mathcal{H}^n$ 上の Hilber-Schmidt 型 $\mathbb{R}$-値 n 重線形線形写像からなる実可分 Hilbert 空間とする．Wiener 汎関数 F の Malliavin 解析の意味での n 階微分 $\nabla^n F$ は "$\mathcal{H}^{\otimes n}$-値" Wiener 汎関数である．

$q\in L^2(\mu)$ が **2 次 Wiener 汎関数**であるとは，3 階微分 $\nabla^3 q=0$ となることをいう．$h\in\mathcal{H}$ と対称な Hilbert-Schmidt 作用素 $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ を，それぞれ $\mathcal{H}$-値，$\mathcal{H}^{\otimes 2}$-値の定数値 Wiener 汎関数と考え，微分 ∇ の共役作用素 ∇^* を作用させて得られる

$$Q_A\overset{\text{def}}{=}(\nabla^*)^2A,\quad \nabla^*h$$

は共に 2 次 Wiener 汎関数である．逆に，Malliavin 解析の意味での微分 $\nabla F=0$ となる $\mathcal{H}^{\otimes n}$-値 Wiener 汎関数は定数関数となることに注意すれば，2 次 Wiener 汎関数 q は次のような表現を持つことが証明できる．

$$q=\frac{1}{2}Q_A+\nabla^*h+c,\quad \text{ただし},A=\nabla^2q,\ h=\mathbf{E}[\nabla q],\ c=\mathbf{E}[q]$$

とし，$\mathbf{E}$ は μ に関する期待値である．この表示のもと，十分小さい実部を持つ $\zeta\in\mathbb{C}$ に対する q の Fourier-Laplace 型変換は次のようになる．

$$\mathbf{E}[e^{\zeta q}]=\frac{1}{\sqrt{\det_2(I-\zeta A)}}e^{\zeta c}e^{\langle (I-\zeta A)^{-1}h,h\rangle_{\mathcal{H}}}. \tag{1}$$

$\mathcal{W}$ を特定し直接的に A の固有関数展開を求めることで 2 次 Wiener 汎関数の Fourier-Laplace 型変換の具体的な表示を求めることができる．たとえば，次のような 2 次 Wiener 汎関数である．

(i) $[0,T]$ 上の 1 次元 Wiener 空間 $\mathcal{W}_T^1$ における $\mathfrak{h}_T\overset{\text{def}}{=}\int_0^T\theta_t^2dt$．ただし，$\theta_t(w)=w(t)$ $(w\in\mathcal{W}_T^1)$ とする．

(ii) $\mathcal{W}_T^1$ における $\mathfrak{v}_T\overset{\text{def}}{=}\int_0^T(\theta_t-\overline{\theta})^2dt$．ただし，$\overline{\theta}=\frac{1}{T}\int_0^T\theta_tdt$ とおく．

(iii) $[0,T]$ 上の 2 次元 Wiener 空間 $\mathcal{W}_T^2$ における $\mathfrak{s}_T\overset{\text{def}}{=}\int_0^T\langle J\theta_t,d\theta_t\rangle_{\mathbb{R}^2}$．ただし，$J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ である．

(iv) $\mathcal{W}_T^1$ における $\displaystyle\int_0^T\left(\int_t^T\theta_s ds\right)^2dt$．これは，$\frac{1}{4}\|\nabla\mathfrak{h}_T\|_{\mathcal{H}}^2$ と一致しており，$\mathfrak{h}_T$ に関する停留位相法を考える際に自然に出現する．

(v) $[0,T]$ 上の n 次元 Wiener 空間 $\mathcal{W}_T^n$ における $\displaystyle\int_0^T\langle\boldsymbol{c},\xi_{\boldsymbol{p}}(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}^2dt+\langle B\xi_{\boldsymbol{p}}(T),\xi_{\boldsymbol{p}}(T)\rangle_{\mathbb{R}^n}$．ただし，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n, B\in\mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{p}=(p^1,\dots,p^n)\in\mathbb{R}^n$，$\xi_{\boldsymbol{p}}^i(t)=e^{-p^it}\displaystyle\int_0^t e^{p^is}d\theta_s^i$ $(i=1,\dots,n)$ とする．

これは，KdV 方程式のソリトン解 (無反射ポテンシャル) を構成する際に現れる．

(vi) $[0,T]^2$ 上の $W(t,0)=W(0,s)=0$ となる 2 変数連続関数 $W(t,s)$ の全体 $\mathbf{W}$ 上の $\displaystyle\int_{[0,T]^2}W(t,s)^2dtds$．これは $\mathfrak{h}_T$ の自然な拡張である．

(vii) $[0,1]$ 上の 1 次元ピンド Wiener 空間における $\displaystyle\int_0^1\frac{\theta_t^2}{t(1-t)}dt$．これは Anderson-Darling 統計量と関連して出現する．

(viii) $\mathcal{W}_T^2$ における $\displaystyle\int_0^T\langle J\xi_{\boldsymbol{p}}(t),d\xi_{\boldsymbol{p}}(t)\rangle_{\mathbb{R}^2}$．ただし，$\boldsymbol{p}=(p,p)$ とする．

本講演では，上記 (iv)∼(viii) について簡単に紹介したのち，(viii) を一般化して得られる，以下に述べる $\mathcal{W}_T^2$ の 2 次 Wiener 汎関数について報告する．

C^1-級関数 $\phi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ に対し，$\mathbb{R}^2$-値確率過程 $\{\Theta^\phi(t)=(\Theta^{\phi,1}(t),\Theta^{\phi,2}(t))\}_{t\leqq T}$ を

$$\Theta^{\phi,\alpha}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\phi(t)}\displaystyle\int_0^t\phi(s)d\theta^\alpha(s) & (t>0),\\ 0 & (t=0),\end{cases}\qquad \alpha=1,2$$

と定義する．これを用いて $\{\mathfrak{s}^\phi(t)\}_{t\leqq T}$ を

$$\mathfrak{s}^\phi(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\langle J\Theta^\phi(s),d\Theta^\phi(s)\rangle_{\mathbb{R}^2}$$

と定義する．

$$\overbrace{Ah}^{\cdot}(t)=J\left\{\Theta_t^\phi[h]-\phi(t)\left(\int_t^T\frac{\phi'(s)}{\phi(s)^2}\Theta_s^\phi[h]ds\right)\right\}\quad(t\leqq T,\,h\in\mathcal{H})$$

で与えられる対称な Hilbert-Schmidt 作用素 $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ を用いて

$$\mathfrak{s}^\phi(T)=\frac{1}{2}Q_A$$

と表現できること，さらにこの A についての考察から得られる $\mathbf{E}[e^{\zeta\mathfrak{s}^\phi(T)}]$ の具体形について紹介する．さらに，Cameron-Martin に由来する Strum-Liouville 方程式を用いる手法を利用して得られる別の表示についても紹介する．