

nearly stable process の加法汎関数に対する大偏差原理

長岡工業高等専門学校 一般教育科 田原 喜宏¹

「確率解析とその周辺」

於 佐賀大学

2011 年 11 月 11~13 日

本講演では, nearly stable process という対称 α 安定過程を含む対称 Lévy 過程のスペクトル関数の微分可能性及び, 加法汎関数の大偏差原理について述べる.

$\mathbf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ を表象 $p(\xi) = |\xi|^\alpha l(|\xi|^2)$, ($0 < \alpha < 2, \xi \in \mathbb{R}^d$) を持つ $\mathbb{R}^d$ 上の対称 Lévy 過程とする. ここで $l(\cdot)$ は無限遠方で緩変動であるような関数である. すなわち, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} l(t\lambda)/l(\lambda) = 1$, ($t > 0$) を満たす. このような Lévy 過程 $\mathbf{M}$ を **nearly stable process** という. $l \equiv 1$ のとき, $\mathbf{M}$ は対称 α 安定過程である.

$\{P_t\}_{t>0}$ を $\mathbf{M}$ の推移半群 $P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) f(y) dy$, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $\mathbf{M}$ に対応する **Dirichlet** 形式:

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (u - P_t u, u) < \infty \right\}, \\ \mathcal{E}(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (u - P_t u, v), \quad u, v \in \mathcal{F} \end{cases}$$

とする. $(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{F}^{(\alpha)})$ を α 安定過程に対応する Dirichlet 形式とすると, 次の評価が成立する.

定理 1. $\mathcal{E}_1(u, u) = \mathcal{E}(u, u) + (u, u)$ とする.

(i) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} l(\lambda) = +\infty, \alpha < \alpha' < 2 \implies \exists C_l, C_{\alpha'} > 0, C_l \mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u, u) \leq \mathcal{E}_1(u, u) \leq C_{\alpha'} \mathcal{E}_1^{(\alpha')}(u, u).$

(ii) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} l(\lambda) = \gamma > 0 \implies \exists C_\gamma > 0, C_\gamma^{-1} \mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u, u) \leq \mathcal{E}_1(u, u) \leq C_\gamma \mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u, u).$

(iii) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} l(\lambda) = 0, 0 < \alpha'' < \alpha \implies \exists C_l, C_{\alpha''} > 0, C_{\alpha''} \mathcal{E}_1^{(\alpha'')}(u, u) \leq \mathcal{E}_1(u, u) \leq C_l \mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u, u).$

$\mathbb{R}^d$ 上の測度 μ が滑らかであるとは, 任意の γ 超過関数 g ($\gamma \geq 0$) と正の Borel 可測関数 f に対し,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x \left[\int_0^t f(X_s) dA_s^\mu \right] g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) d\mu$$

となる正值連続加法汎関数 A_t^μ が存在することを言う. この μ と A_t^μ の対応を **Revuz** 対応という.

$$G_\alpha(x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t, x, y) dt,$$

$G_0(x, y) = G(x, y)$ とおく. 滑らかな測度 μ に対し, μ の α ポテンシャル $G_\alpha \mu(x)$ を

$$G_\alpha \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_\alpha(x, y) \mu(dy).$$

で定義する. 滑らかな測度 μ に対し $\mu_R(\cdot) = \mu(B(R) \cap \cdot)$, $\mu_{R^c}(\cdot) = \mu(B(R)^c \cap \cdot)$ とおく. ここで $B(R)$ は原点中心, 半径 R の開球である.

定義 1. μ を $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな正 Radon 測度とする.

(1) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|G_\alpha \mu\|_\infty = 0$ のとき, μ は加藤クラスに属するという.

(2) 加藤クラスに属する測度 μ が

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|G \mu_{R^c}\|_\infty = 0, \quad (\mathbf{M} \text{ が過渡的な場合})$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|G_1 \mu_{R^c}\|_\infty = 0, \quad (\mathbf{M} \text{ が再帰的な場合})$$

を満たすとき, μ は **Green** 緊密な加藤クラスに属するという (以下, $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ と略記する).

¹本研究は土田兼治氏 (防衛大) との共同研究である

(3) $\mathbf{M}$ は過渡的とする. 滑らかな正測度 μ が, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある μ 有限な Borel 集合 $K = K(\epsilon)$ と $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在して,

$$\sup_{(x,z) \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus \Delta} \int_{K^c} \frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)} \mu(dy) \leq \epsilon$$

となり, $\mu(B) < \delta$ なる任意の可測集合 $B \subset K$ に対し

$$\sup_{(x,z) \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus \Delta} \int_B \frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)} \mu(dy) \leq \epsilon, \quad (\text{ただし, } \Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^d\})$$

となるとき, クラス $\mathcal{S}_\infty$ に属するという.

$\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対しスペクトル関数 $C(\theta)$ を以下に定める:

$$C(\theta) = -\inf \left\{ \mathcal{E}(u, u) - \theta \int u^2 d\mu : u \in \mathcal{F}, \int u^2 dx = 1 \right\}.$$

$$\mathcal{E}(h, h) = \inf \left\{ \mathcal{E}(u, u) : \int u^2 d\mu = 1 \right\}$$

を満たす h を **ground state** という.

定理 2 ([2, Theorem 4.1 and Theorem 5.1]). $\mathbf{M}$ を特性関数 $\phi(|\xi|^2) = |\xi|^{\alpha} l(|\xi|^2)$ を持つ nearly stable process とする.

M が再帰的な場合: $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対し $C(\theta)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能である.

M が過渡的な場合: $\mu \in \mathcal{S}_\infty$ に対し拡張 Dirichlet 空間 $\mathcal{F}_e$ から $L^2(\mu)$ への埋め込みがコンパクトであるとする. このとき, ground state h は存在する. さらに h について Harnack 不等式:

$$\exists C > 0 \text{ such that } h(x) \leq Ch(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

が成立するとき, $h \notin L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば $C(\theta)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能である.

定理 2 と Gärtner-Ellis の定理 ([1, Theorem 2.5.8]) により, 次の加法汎関数 A_t^μ の大偏差原理が成立する:

定理 3 ([2, Theorem 7.2]). A_t^μ を $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ の正值加法汎関数で, 定理 2 を満たしているものとする. $I(\lambda)$ を $C(\theta)$ の Legendre 変換, すなわち $I(\lambda) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{\theta\lambda - C(\theta)\}$ とする. このとき,

(I) $\mathbb{R}$ の開集合 G に対し,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\frac{A_t^\mu}{t} \in G \right) \geq - \inf_{\lambda \in G} I(\lambda),$$

(II) $\mathbb{R}$ の閉集合 F に対し,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\frac{A_t^\mu}{t} \in F \right) \leq - \inf_{\lambda \in F} I(\lambda).$$

参考文献

- [1] A. Dembo, O. Zeitouni, Large Deviations Techniques and Applications, vol. 38 of Applications of Mathematics (New York), 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1998.
- [2] Y. Tawara and K. Tsuchida, Differentiability of spectral functions for nearly stable processes and large deviations, preprint, available at <http://www.nagaoka-ct.ac.jp/~tawara/pdfs/Taw-Tsu.pdf>