

Remark on the uniqueness of Silverstein extensions of symmetric Dirichlet forms

桑江 一洋（熊本大学） 塩沢 裕一（岡山大学）

確率解析とその周辺
佐賀大学
2011年11月11日

1. 序

[CF, Examples 6.6.12]

▷ $D \subset \mathbb{R}^d$: 領域

$$H^1(D) = \left\{ u \in L^2(D) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(D), \ 1 \leq i \leq d \right\}$$

$$\mathbf{D}(u, u) = \int_D |\nabla u|^2 \, dx$$

○ d 次元ブラウン運動 $\iff (\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{D}, H^1(\mathbb{R}^d) \right)$

▷ $D \subset \mathbb{R}^d$: 有界 Lipschitz 領域

○ D 上の吸収壁ブラウン運動 $\iff (\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{D}, H_0^1(D)\right)$

ただし

$H_0^1(D) := C_0^\infty(D)$ の $\sqrt{\mathcal{E}(\cdot, \cdot) + \|\cdot\|_{L^2(D)}^2}$ 閉包

○ D 上の反射壁ブラウン運動 $\iff (\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{D}, H^1(D)\right)$

注意. (i) $\left(\frac{1}{2}\mathbf{D}, H_0^1(D)\right)$ は $L^2(D)$ 上の正則 Dirichlet 形式

(ii) $\left(\frac{1}{2}\mathbf{D}, H^1(D)\right)$ は $L^2(\overline{D})$ 上の正則 Dirichlet 形式

2. Silverstein 拡張

- E : 局所コンパクト可分距離空間

- m : E 全体に台を持つ正值 Radon 測度

- $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: $L^2(E; m)$ 上の正則 Dirichlet 形式

(正則とは限らない) Dirichlet 形式 $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}})$ が $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の**拡張**

$$\begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \text{定義} \end{array} \quad \mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}} \quad \text{かつ} \quad \tilde{\mathcal{E}}(u, u) = \mathcal{E}(u, u), \quad \forall u \in \mathcal{F}$$

- $\mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の拡張全体の集合

Silverstein 拡張 [Silverstein (1974)]

$$\mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F})$$

$$:= \left\{ (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}}) \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) : u \cdot v \in \mathcal{F}_b, \forall u \in \mathcal{F}_b, \forall v \in \tilde{\mathcal{F}}_b \right\}$$

Silverstein 拡張の確率論的な意味 ([FOT, Appendix]):

- $M : (\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から生成される E 上の対称マルコフ過程
 - $\tilde{M} : (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}})$ から生成される $\tilde{E}$ ($\supset_{\text{稠密}} E$) 上の対称マルコフ過程
- $\implies E$ に関する $\tilde{M}$ の吸収壁過程が M

問題. いつ $\#\mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 1$ が成立するか?

3. 内在的距離と Silverstein 拡張の一意性

Beurling-Deny 分解.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u, u) &= \mathcal{E}^{(c)}(u, u) + \frac{1}{2} \iint_{E \times E \setminus d} (u(x) - u(y))^2 J(\mathrm{d}x \mathrm{d}y) \\ &\quad + \int_E u(x)^2 \kappa(\mathrm{d}x), \quad u \in \mathcal{F} \cap C_0(E)\end{aligned}$$

ただし

- $\mathcal{E}^{(c)}$: 強局所型 2 次形式 (拡散項)
- $J : E \times E \setminus d$ 上の正值 Radon 測度 (飛躍項)
- $\kappa : E$ 上の正值 Radon 測度 (内部消滅項)

エネルギー測度.

$\forall u \in \mathcal{F}, \exists \mu_{\langle u \rangle}^c : E$ 上の正值 Radon 測度 s.t.

$$\mathcal{E}^{(c)}(u, u) = \frac{1}{2} \mu_{\langle u \rangle}^c(E)$$

$$\mathcal{F}_{\text{loc}} := \left\{ u : E \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall \text{rel. cpt. open } G \subset E, \right. \\ \left. \exists u_G \in \mathcal{F} \text{ s.t. } u = u_G \text{ } m\text{-a.e. on } G \right\}$$

注意. 各 $u \in \mathcal{F}_{\text{loc}}$ に対して $\mu_{\langle u \rangle}^c$ は well-defined に定まる.

各 $u \in \mathcal{F}_{\text{loc}}$ に対して

$$\mu_{\langle u \rangle}^j(B) := \frac{1}{2} \iint_{B \times E \setminus d} (u(x) - u(y))^2 J(dx dy)$$

$$\mu_{\langle u \rangle}^\kappa(B) := \frac{1}{2} \int_B u(x)^2 \kappa(dx)$$

強局所型 Dirichlet 形式の内在的距離.

○ $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: 強局所型 Dirichlet 形式

$$\rho(x, y) := \sup \{ u(x) - u(y) \mid u \in \mathcal{F}_{\text{loc}} \cap C(E), \mu_{\langle u \rangle}^c \leq m \}$$

を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の**内在的距離**という [Biroli-Mosco (1991), Sturm (1995)].

注意. (i) ρ は擬距離であり, 一般に距離になるとは限らない.

(ii) ρ は一次元拡散過程の尺度に相当する役割を果たす.

仮定. (i) ρ は E 上の距離であり, その生成する位相は元の位相と一致する.

(ii) $\forall p \in E, \forall r > 0, \{x \in E \mid \rho(p, x) < r\} : \text{rel. cpt.}$

定理 [Kawabata-Takeda (1996)]. 仮定の下, $\sharp \mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 1$.

注意. 爆発が起きる場合でも $\sharp \mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 1$ は成立し得る.

一般の正則 Dirichlet 形式に対する内在的距離.

定義 [Frank-Lenz-Wingert (2010)].

E 上の擬距離 ρ が正則 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の内在的距離

$\Longleftrightarrow$
定義

$\exists m_c, \exists m_j : E$ 上の正值 Radon 測度 with $m_c + m_j \leq m$ s.t.

各 $A \subset E$ と $T > 0$ について,

$$\rho_A(x) := \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

が以下の 3 条件を満たす.

$$(i) \quad \rho_A \wedge T \in \mathcal{F}_{\text{loc}}^\dagger \cap C(E)$$

$$(ii) \quad \mu_{\langle \rho_A \wedge T \rangle}^c \leq m_c$$

$$(iii) \quad \mu_{\langle \rho_A \wedge T \rangle}^j \leq m_j.$$

ただし

$$\mathcal{F}_{\text{loc}}^\dagger := \{u \in \mathcal{F}_{\text{loc}} \mid \mu_{\langle u \rangle}^j \text{ は Radon 測度 } \}.$$

仮定. (i) ρ は E 上の距離であり, その生成する位相は元の位相と一致する.

(ii) $\forall p \in E, \forall r > 0, \{x \in E \mid \rho(p, x) < r\} : \text{rel. cpt.}$

定理 [Kuwaie-S]. 仮定の下, $\sharp \mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 1$.

注意. 定理の証明は, [Kuwaie (2002), Theorem 6.1] を, 正則 Dirichlet 形式に制限した場合の別証明になる.

4. 証明の概略.

(active) 反射 Dirichlet 空間.

[Silverstein (1974), Z.-Q. Chen (1992)]

$$\mathcal{F}^{\text{ref}} := \left\{ u \in L^2(E; m) \mid u^{(n)} \in \mathcal{F}_{\text{loc}}, \forall n \geq 1, \right. \\ \left. \sup_{n \geq 1} \mu_{\langle u^{(n)} \rangle}^{c+j+\kappa}(E) < \infty \right\}$$

$$\mathcal{E}^{\text{ref}}(u, u) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \mu_{\langle u^{(n)} \rangle}^{c+j+2\kappa}(E)$$

ただし

$$u^{(n)} := (-n) \vee u \wedge n$$

注意. [Kawabata-Takeda (1996), Kuwae (2002)]

- $(\mathcal{E}^{\text{ref}}, \mathcal{F}^{\text{ref}}) \in \mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F})$

- $\forall (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}}) \in \mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}),$

$$\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}^{\text{ref}} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}^{\text{ref}}(u, u) = \tilde{\mathcal{E}}(u, u), \quad \forall u \in \tilde{\mathcal{F}}.$$

証明の概略.

示すこと: $\mathcal{F}^{\text{ref}} = \mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{\text{ref}}$ は明らか)

任意の $\mathcal{F}_b^{\text{ref}}$ の元が $\mathcal{F}_b$ の元で近似できることを示せば良い.

Fix $p \in E$.

○ $\rho_p(x) := \rho(p, x)$

○ $\varphi_n(x) := 0 \vee (n + 1 - x) \wedge 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

仮定 (ii) と [FLW, Proposition 4.6] より

$$\varphi_n(\rho_p(x)) \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$$

$$u \in \mathcal{F}_b^{\text{ref}} \Rightarrow \mathcal{F}_b \cdot \mathcal{F}_b^{\text{ref}} \subset \mathcal{F}_b \text{ より}$$

$$u_n := u \cdot \varphi_n(\rho_p) \in \mathcal{F}_b \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^2} = 0$$

$$\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m)$$

$$\leq \int_E u(x)^2 \mu_{\langle \varphi_n(\rho_p) - \varphi_m(\rho_p) \rangle}^{c+j}(\mathrm{d}x)$$

$$+ \int_E (\varphi_n(\rho_p(x)) - \varphi_m(\rho_p(x)))^2 \mu_{\langle u \rangle}^{c+j+\kappa}(\mathrm{d}x)$$

$$=: \text{(I)} + \text{(II)}$$

$$\begin{aligned}
(\text{I}) &= \int_E u(x)^2 \mu_{\langle \varphi_n(\rho_p) - \varphi_m(\rho_p) \rangle}^{c+j}(\mathrm{d}x) \\
&\leq \int_E u(x)^2 \mu_{\langle \rho_p \rangle}^{c+j}(\mathrm{d}x) \leq \int_E u(x)^2 m(\mathrm{d}x) < \infty \\
(\text{II}) &= \int_E (\varphi_n(\rho_p(x)) - \varphi_m(\rho_p(x)))^2 \mu_{\langle u \rangle}^{c+j+\kappa}(\mathrm{d}x) \\
&\leq \mu_{\langle u \rangle}^{c+j+\kappa}(E) < \infty \quad (\because u \in \mathcal{F}_b^{\text{ref}})
\end{aligned}$$

よって, 有界収束定理より

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} (\text{I}) = \lim_{m,n \rightarrow \infty} (\text{II}) = 0$$

従って $u \in \mathcal{F}_b$.

5. 例.

Fix $0 < \alpha < 2, m > 0$

$$\mathcal{E}^\alpha(u, u) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus d} (u(x) - u(y))^2 g(x, y) J(x, y) \, dx dy$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}^\alpha) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \mathcal{E}^\alpha(u, u) < \infty \right\}$$

ただし

$$J(x, y) = c(d, \alpha) \frac{\Psi(m^{1/\alpha} |x - y|)}{|x - y|^{d+\alpha}}$$

$g \equiv 1$ のとき, $\mathcal{E}^\alpha$ の生成作用素は

$$\mathcal{H} = m - (m^{2/\alpha} - \Delta)^{\alpha/2}$$

[Z.-Q. Chen, R. Song (2003)] $\exists c_1, c_2, c_3 > 0$ s.t.

$$J(x, y) \leq \begin{cases} \frac{c_1}{|x - y|^{d+\alpha}} & \text{if } |x - y| < 1 \\ c_2 e^{-c_3 |x - y|} & \text{if } |x - y| \geq 1. \end{cases}$$

(1) 非有界係数を持つ場合.

$$g(x, y) := (e + |x|)^2 (\log(e + |x|))^2 + (e + |y|)^2 (\log(e + |y|))^2$$

$$\mathcal{F} := C_0^{\text{lip}}(\mathbb{R}^d) \text{ の } \sqrt{\mathcal{E}(\cdot, \cdot) + \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2} \text{ 閉包}$$

$\Rightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則 Dirichlet 形式

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の Silverstein 拡張は一意に定まる.

$$\rho(x, y) = \log \log(e + |x - y|) \left(= \int_0^{|x-y|} \frac{ds}{(e + s) \log(e + s)} \right)$$

注意. (i) ([Schilling-Uemura (2011)]) $(\mathcal{E}^\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\alpha))$ は

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の Silverstein 拡張. 従って

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$$

(ii) $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の保存性は不明.

(2) 時間変更 Dirichlet 形式.

$$g \equiv 1, \mu(dx) = \{(e + |x|) \log(e + |x|)\}^{-2} dx$$

○ $(\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{F}}) : (\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の μ による時間変更 Dirichlet 形式 (on $L^2(\mathbb{R}^d; \mu)$)

$(\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{F}})$ の生成作用素は

$$\check{\mathcal{H}} = (e + |x|)^2 (\log(e + |x|))^2 \mathcal{H}$$

$(\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{F}})$ の Silverstein 拡張も一意に定まる.

注意. $(\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{F}})$ は爆発する ([S-Uemura]).