飛躍関数付き Feynman-Kac 処罰問題

松浦將國*

平成 23 年 11 月 13 日†

正値連続加法的汎関数 (PCAF) に飛躍を考慮した項を加えた場合の Feynman-Kac 処罰問題を解決した．Feynman-Kac 処罰問題とは次のようなものであった．

$(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x, \{X_t\}_{t\geq 0})_{x\in\mathbb{R}^n}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の対称 α 安定過程 $(0<\alpha<2)$ とし，μ は加藤クラス $\mathcal{K}_\infty$ に属しているとする．ここに，

$$\mu \in \mathcal{K} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{\beta\to\infty} \|G_\beta\mu\|_\infty = 0, \quad \mu \in \mathcal{K}_\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mu \in \mathcal{K} \text{ and } \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \sup_{B_r\subset B(0,R)} \|G(\mathbf{1}_{B_r\cup B(0,R)^c}\mu)\|_\infty = 0$$

A_t^μ を μ を Revuz 測度にもつ正値連続加法的汎関数 (PCAF)，F をある正値対称有界な二変数関数で対角線上 0 になるものとし，次の加法的汎関数 (AF) を考える．

$$A_t^{\mu,F} := A_t^\mu + \sum_{0<u\leq t} F(X_{u-}, X_u) \tag{1}$$

このとき，(i) 任意の $S \in \mathcal{M}_s$ に対し，極限

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}_x[e^{A_t^{\mu,F}}\mathbf{1}_S]}{\mathbb{E}_x[e^{A_t^{\mu,F}}]}$$

は存在するか? また，(ii) その極限測度はあるマルチンゲールによる重み付けで明示的に表現されるか?

これに対し筆者は以下の通り解決した．まず，Doléans-Dade 方程式の解となる指数型マルチンゲール M が次の通り与えられる．

$$M_t = e^{\sum_{u\leq t} F(X_{u-},X_u) - c\int_0^t \int F_1(X_u,y)|X_u-y|^{-(n+\alpha)}dydu}$$

ここに，$F_1 := e^F - 1$ である．次に Revuz 対応の関係式から PCAF $t \mapsto \int_0^t \int F_1(X_u,y)|X_u - y|^{-(n+\alpha)}dydu$ に対応する Revuz 測度が

$$\mu_{F_1}(dx) := c\left\{\int F_1(x,y)|x-y|^{-(n+\alpha)}dy\right\}dx$$

と計算されることに注意すれば，Feynman-Kac 型乗法的汎関数は $e^{A_t^{\mu,F}} = M_t e^{A_t^{\mu+\mu_{F_1}}}$ と変換される．さらに，

$$d\mathbb{P}_x^M := M_s d\mathbb{P}_x \tag{2}$$

*東北大学大学院理学研究科数学専攻博士課程三年，メール：sa9d10@math.tohoku.ac.jp, ウェブサイト：http://www.math.tohoku.ac.jp/~sa9d10/index.html.

†研究集会「確率解析とその周辺」，平成 23 年 11 月 11 日 – 13 日，佐賀大学理工学部.

と重み付ける．この変換をした後の対称マルコフ過程を Y とすると，それに連動するディリクレ形式 $\mathcal{E}^Y$ は

$$\mathcal{E}^Y(u,u) = \mathcal{E}^\alpha(u,u) + \frac{c}{2}\int \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{\alpha+n}} F_1(x,y)dxdy = \frac{c}{2}\int \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{\alpha+n}} e^{F(x,y)}dxdy$$

で与えられる．ここで，Lévy 核が同値であることから Bass and Levin (2002) より X と Y の推移確率が同値であることも分かる．よって，(2) の変換を通しても加藤クラスは不変である．つまり，$\mu+\mu_{F_1} \in \mathcal{K}_\infty$ である限り，飛躍関数が付いても Takeda (2010) に帰されることを示した．

$$\lambda_0 := \inf\left\{\mathcal{E}^Y(u,u)\ ;\ \int u^2 d(\mu+\mu_{F_1}) = 1\right\}$$

と定めると，(a) $\lambda_0 > 1$ のとき（劣臨界的の場合），$h(x) := \mathbb{E}_x^M[e^{A_\infty^{\mu+\mu_{F_1}}}] < \infty$ であるから，

$$L_s := \frac{e^{A_t^{\mu,F}} h(X_s)}{h(x)}$$

が求める重み付けマルチンゲールである．

$\lambda_0 < 1$［$\lambda_0 = 1$］のときはディリクレ空間 $\mathcal{E}^Y$［$\mathcal{E}^Y$ の拡大ディリクレ空間］から $L^2(\mu+\mu_{F_1})$ へのコンパクトな埋め込みが知られているから（Takeda and Tsuchida (2008)），調和関数 $h \in L^2(\mu+\mu_{F_1})$ が存在する．よって，(b) $\lambda_0 < 1$ のとき（優臨界的の場合）は正数 $\theta > 0$ が存在して

$$L_s := \frac{e^{-\theta t + A_t^{\mu,F}} h(X_s)}{h(x)}$$

が求める重み付けマルチンゲールとなる．(c) $\lambda_0 = 1$ のとき（臨界的の場合）は加藤クラスを次のように少し狭める．

$$\mu \in \mathcal{K}_s \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \mu \in \mathcal{K} \text{ and } \sup_x |x|^{n-\alpha}\int |x-y|^{\alpha-n}\mu(dy) < \infty$$

$\mu+\mu_{F_1} \in \mathcal{K}_s$ である限り，Chacon-Ornstein 型エルゴード定理を用いて重み付けマルチンゲールが次の通り得られる．

$$L_s := \frac{e^{A_t^{\mu,F}} h(X_s)}{h(x)}$$

本講演では以上の件を簡単に振り返る．

また，対称安定過程のグリーン関数は $G(x,y) = c|x-y|^{\alpha-n}$ であるから，$\mu_F \in \mathcal{K}_\infty$ は次のように読み替えられる．

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \sup_{B_r \subset B(0,R)} \sup_x \int_{B_r \cup B(0,R)^c} dy|x-y|^{\alpha-n}\int F(y,z)|y-z|^{-(n+\alpha)}dz = 0 \tag{3}$$

これを満たす関数の代表例は $F(x,y) = \mathbf{1}_{K_1}(x)\mathbf{1}_{K_2}(y) + \mathbf{1}_{K_2}(x)\mathbf{1}_{K_1}(y)$ （K_1, K_2 は非交なコンパクト集合）である．しかし，球座標変換と Fubini の定理を用いた計算により次の関数も条件 (3) を満たすことが分かった．

$$F(x,y) = (1 \wedge |x-y|^p)\langle x\rangle^{-q}\langle y\rangle^{-q}$$

ここで $p > \alpha, q > n$ である．本講演ではこの例についても言及する．