

The probability distributions of the first hitting times of Bessel processes

濱名裕治 (熊本大理), 松本裕行 (山形大理)

実数 ν に対して, $\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{2x} \frac{d}{dx}$ を生成作用素にもつ 1 次元拡散過程を, 指数 ν のベッセル過程とよぶ. 特に, $2\nu+2$ が正の整数であるときは, $2\nu+2$ 次元ブラウン運動の半径方向の運動として表示できる. 境界は 0 と ∞ で, ∞ は自然境界である. 0 は, $\nu \leq -1$ のときは流出境界, $-1 < \nu < 0$ のときは正則境界, $\nu \geq 0$ のときは流入境界であり, 境界条件は, $\nu \leq -1$ のとき吸収壁, $-1 < \nu < 0$ のとき反射壁とする.

a から出発する指数 ν のベッセル過程が初めて b に到達する時刻を $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ とする. $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ のラプラス変換が求められており, $\lambda > 0$ に対して, 次が成立する.

- (1) $b > 0, \nu > -1$ のとき, $E[e^{-\lambda\tau_{0,b}^{(\nu)}}] = \frac{(b\sqrt{2\lambda})^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \frac{1}{I_\nu(b\sqrt{2\lambda})}$
- (2) $0 < a \leq b, \nu > -1$ のとき, $E[e^{-\lambda\tau_{a,b}^{(\nu)}}] = \frac{a^{-\nu} I_\nu(a\sqrt{2\lambda})}{b^{-\nu} I_\nu(b\sqrt{2\lambda})}$
- (3) $0 < a \leq b, \nu \leq -1$ のとき, $E[e^{-\lambda\tau_{a,b}^{(\nu)}}] = \frac{a^{-\nu} I_{-\nu}(a\sqrt{2\lambda})}{b^{-\nu} I_{-\nu}(b\sqrt{2\lambda})}$
- (4) $a > 0, \nu < 0$ のとき, $E[e^{-\lambda\tau_{a,0}^{(\nu)}}] = \frac{2^{\nu+1}}{\Gamma(|\nu|)(a\sqrt{2\lambda})^\nu} K_\nu(a\sqrt{2\lambda})$
- (5) $0 < b \leq a, \nu \in \mathbb{R}$ のとき, $E[e^{-\lambda\tau_{a,b}^{(\nu)}}] = \frac{a^{-\nu} K_\nu(a\sqrt{2\lambda})}{b^{-\nu} K_\nu(b\sqrt{2\lambda})}$

ただし, I_ν は第 1 種変形ベッセル関数, K_ν は第 2 種変形ベッセル関数である.

Ciesielski and Taylor (1962) は, $2\nu+2$ が自然数のとき, $\tau_{0,b}^{(\nu)}$ の密度関数が

$$\frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1) b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,k}^{\nu+1}}{J_{\nu+1}(j_{\nu,k})} e^{-\frac{j_{\nu,k}^2}{2b^2} t}$$

と表示されることを示した. 彼らの結果は $\nu > -1$ でも正しいことがわかる. $\nu > 0$ の場合は, Borodin-Salminen (Handbook of Brownian Motion, Springer) に書かれているが, 証明や参考文献が見当たらない.

$0 < a < b$ の場合, 次の結果が得られた.

定理 1. 第 1 種ベッセル関数 J_ν の正の零点の増大列を $\{j_{\nu,k}\}_{k=1}^{\infty}$ とする.

(1) $\nu > -1$ のとき,

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leq t) = 1 - 2 \left(\frac{b}{a} \right)^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_\nu(a j_{\nu,k}/b)}{j_{\nu,k} J_{\nu+1}(j_{\nu,k})} e^{-\frac{j_{\nu,k}^2}{2b^2} t}$$

(2) $\nu \leq -1$ のとき,

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leq t) = \left(\frac{b}{a} \right)^{2\nu} - 2 \left(\frac{b}{a} \right)^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{-\nu}(a j_{-\nu,k}/b)}{j_{-\nu,k} J_{-\nu+1}(j_{-\nu,k})} e^{-\frac{j_{-\nu,k}^2}{2b^2} t}$$

次に $0 \leq b < a$ の場合を考えるが, $\nu < 0$ のときの $\tau_{a,0}^{(\nu)}$ の確率密度は容易に求まり,

$$\frac{2^\nu}{\Gamma(|\nu|)a^2} t^{\nu-1} e^{-\frac{a^2}{2t}}$$

となる. そこで, $0 < b < a$ とする. Byczkowski et al (2006, 2007) は一般の場合に分布関数の表示を与えているが, 最終形が複雑である. 前回, 分布関数の簡素な表示を報告したが, 間違いがあったので, その訂正の意味もこめて, 正しい結果を報告する.

第2種変形ベッセル関数 K_ν の零点を $\{z_{\nu,k}\}_{k=1}^{N(\nu)}$ とする. 零点の個数 $N(\nu)$ は, $\nu - 1/2$ が整数のときは, $|\nu| - 1/2$ となり, 整数でないときは $|\nu| - 1/2$ に最も近い偶数である. また, $\operatorname{Re}(z_{\nu,k}) < 0$ であることが知られている. $F_1^{(\nu)}, F_2^{(\nu)}, F_3^{(\nu)}$ を次の関数とする.

$$\begin{aligned} F_1^{(\nu)}(t) &= \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu+|\nu|} \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s}} ds \\ F_2^{(\nu)}(t) &= -\left(\frac{b}{a}\right)^\nu \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s}} \left[\int_0^\infty \frac{L_{|\nu|,a/b}(x)}{x} e^{-\frac{x(a-b)\sqrt{t}}{b\sqrt{s}}} dx \right] ds \\ F_3^{(\nu)}(t) &= -\left(\frac{b}{a}\right)^\nu \sum_{j=1}^{N(\nu)} \frac{K_\nu(az_{\nu,j}/b)}{z_{\nu,j}K_{\nu+1}(z_{\nu,j})} \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s} + \frac{z_{\nu,j}(a-b)\sqrt{t}}{b\sqrt{s}}} ds. \end{aligned}$$

ただし, $L_{\mu,c}(x) = \frac{\cos(\pi\mu)\{I_\mu(cx)K_\mu(x) - I_\mu(x)K_\mu(cx)\}}{\{K_\mu(x)\}^2 + \pi^2\{I_\mu(x)\}^2 + 2\pi\sin(\pi\mu)K_\mu(x)I_\mu(x)}$ である.

定理2. $0 < b < a$ とする. (1) $\nu = \pm 1/2$ のとき,

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leq t) = F_1^{(\nu)}(t)$$

(2) $|\nu| < 3/2, \nu \neq \pm 1/2$ のとき,

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leq t) = F_1^{(\nu)}(t) + F_2^{(\nu)}(t)$$

(3) $\nu - 1/2 \in \mathbb{Z}, \nu \neq \pm 1/2$ のとき,

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leq t) = F_1^{(\nu)}(t) + F_3^{(\nu)}(t)$$

(4) $\nu - 1/2 \notin \mathbb{Z}, |\nu| > 3/2$ のとき,

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leq t) = F_1^{(\nu)}(t) + F_2^{(\nu)}(t) + F_3^{(\nu)}(t)$$

この定理から, $P(\tau_{a,b}^{(\nu)} > t)$ の $t \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動が得られる. 簡単のため, $f(t) = g(t) + h(t)\{1 + o(1)\} (t \rightarrow \infty)$ を $f(t) \sim g(t) + h(t)$ と書くことにする.

系. $0 < b < a$ とすると, $t \rightarrow \infty$ のとき次が成り立つ.

(1) $\nu = 0$ のとき,

$$P(\tau_{a,b}^{(0)} > t) \sim \frac{2 \log(a/b)}{\log t}$$

(2) $\nu < 0$ のとき,

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} > t) \sim C_1(\nu)t^\nu$$

(3) $\nu > 0$ のとき,

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} > t) \sim 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu} + C_2(\nu)t^{-\nu}$$

ここでの $C_1(\nu), C_2(\nu)$ は正の定数で具体的に表示できる.