

Hamilton-Jacobi 方程式から導かれる 対数型 Sobolev の不等式とその応用

藤田 安啓 (富山大学理工学研究部) *

本講演では, $\mathbb{R}^n$ 上の Lipschitz 連続関数に対して, その Lipschitz 定数を含む対数型 Sobolev の不等式とその応用について述べる. この対数型 Sobolev の不等式はその起源を Hamilton-Jacobi 方程式に持っている. 以下, 次の記号を使う:

$$\begin{aligned}\text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n) &= \{f \in \text{Lip}(\mathbb{R}^n) \mid e^f \in L^\alpha(\mathbb{R}^n; dx)\}, \quad \alpha > 0, \\ k_n &= \left(\frac{1}{\omega_{n-1}(n-1)!} \right)^{1/n} \quad (\omega_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2) \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の単位球の表面積}), \\ &\text{全ての積分の定義域は } \mathbb{R}^n, \\ \text{Ent}(f) &= \int f \log f dx - \int f dx \log \int f dx, \\ \|f\|_\alpha &= \left(\int |f(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha}, \\ \|Df\|_\infty &= \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

THEOREM 1 ある $\alpha > 0$ に対して, $f \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $f \in \text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$ ($\beta > \alpha$) で, 対数型 Sobolev の不等式

$$\text{Ent}(e^{\beta f}) \leq n \int e^{\beta f} dx \log \left(\frac{k_n \beta \|Df\|_\infty}{e} \right), \quad \beta > \alpha. \quad (1)$$

が成立する. 不等式 (1) は, $f(x) = C - \ell|x - a|$ ($C \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ は定数) のとき等号が成立するという意味で optimal である.

THEOREM 2 ある $\alpha > 0$ に対して, $f \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $f \in \text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$ ($\beta > \alpha$) で, 不等式

$$\|e^f\|_\gamma (k_n \gamma \|Df\|_\infty)^{n/\gamma} \leq \|e^f\|_\beta (k_n \beta \|Df\|_\infty)^{n/\beta}, \quad \alpha \leq \beta < \gamma \quad (2)$$

が成立する. 不等式 (2) は, $f(x) = C - \ell|x - a|$ ($C \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ は定数) のとき等号が成立するという意味で optimal である.

不等式 (1) と (2) は同値な不等式である. 不等式 (1) は, Gentil [4] が示した $p > 1$ に対する L^p -対数型 Sobolev の不等式において $p \rightarrow \infty$ とした不等式と考えることができる. また, この L^p -対数型 Sobolev の不等式は, Hamilton-Jacobi 方程式

$$u_t(x, t) + \frac{1}{p} |Du(x, t)|^p = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad u(\cdot, 0) = f \quad \text{on } \mathbb{R}^n \quad (3)$$

* 「確率解析とその周辺」, 佐賀大学, 2011 年 11 月 11 日 (金) - 13 日 (日)

の解の超縮小性と同値である.

講演では, 上の 2 つの不等式の応用として, Lipschitz 定数のエントロピーによる表現および一般の Hamilton-Jacobi 方程式の解の超縮小性について述べたい.

参考文献

- [1] S. G. BOBKOV, I. GENTIL AND M. LEDOUX, *Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 80 (2001), pp. 669–696.
- [2] Y. FUJITA, *An optimal logarithmic Sobolev inequality with Lipschitz constants*, Journal of Functional Analysis 261 (2011), pp. 1133–1144.
- [3] I. GENTIL, *Ultracontractive bounds on Hamilton—Jacobi equations*, Bulletin des Sciences Mathématiques 126 (2002), pp. 507–524.
- [4] I. GENTIL, *The general optimal L^p -Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations*, Journal of Functional Analysis 202 (2003) pp. 591–599.