Penalisationに関する話題

神戸大理　矢野 孝次

粗く言って次のことがよく知られている:

「1次元ブラウン運動を正の値に条件付けると3次元ベッセル過程が得られる.」 (1)

このことの正確な定式化は一通りではないように思うが，そのうちの一つは以下の通りである．$(X_t, \mathcal{F}_t, W_x)$ をブラウン運動の canonical representation とし，$I_t = \inf_{u \le t} X_u$ とおく．簡単のために出発点 x を正にとると，

$$W_x[F_s | I_t > 0] := \frac{W_x[F_s; I_t > 0]}{W_x(I_t > 0)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} P_x^{3\mathrm{B}}[F_s] \tag{2}$$

が成り立つ. 但し，F_s は有界 $\mathcal{F}_s$-可測なテスト汎関数 (以下つねにその意味) であり，$(X_t, P_x^{3\mathrm{B}})$ は3次元ベッセル過程の canonical representation.

Roynette–Vallois–Yor ([13],[12] など) はブラウン運動について，重みを掛けて正規化してできる確率測度の長時間極限を調べ，それを **penalisation** と呼んだ ([14],[15])．すなわち，重み過程 $(\Gamma_t)_{t\ge 0}$ に対して

$$\frac{W_x[F_s \Gamma_t]}{W_x[\Gamma_t]} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} P_x^{\Gamma}[F_s] \tag{3}$$

なる形の極限定理のことであり，それは (2) で述べた条件付けの一般化と考えることができる．彼らは penalisation をいくつかの重み過程に対して調べた．最大値の関数，局所時間の関数，Kac 消滅がその代表的なものである．

Penalisation において問題となる点は次の二つである．一つは過程の収束 (3) を証明することであり，もう一つは極限確率測度 P_x^{Γ} がどのように特徴づけられるかを論ずることである．前者のためには解析的な困難を克服を要するため，重み過程のクラスを限定して個別に議論せざるを得ない面がある．一方で後者については，Najnudel–Roynette–Yor [10] が統一的な見方を与えた．彼らは重み過程に依らないある **universal なシグマ有限測度**を導入し，極限確率測度がみなそのシグマ有限測度に関して絶対連続であることを示した．

本講演では，以下の三つの話題についてサーベイしたい．一つ目の話題は，乗法的汎関数の重み過程に対する penalisation に付随するシグマ有限測度の universality について ([18])．二つ目の話題は，filtration の完備化についての Najnudel–Nikeghbali [7] によって得られた結果のサーベイ．三つめの話題は，高分子鎖の Edwards' model に対する極限定理を一次元の場合に示した Najnudel による結果 [5] のサーベイである．

()E-mail: kyano@math.kobe-u.ac.jp　URL: http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kyano/

1　乗法的汎関数による penalisation

(X_t, P_x) を càdlàg path を持つ強マルコフ過程の canonical representation とする．$(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ を coordinate process $(X_t)_{t\ge 0}$ により生成される自然な filtration とする．ここでは，重み過程 $(\Gamma_t)_{t\ge 0}$ が $[0,1]$ 値乗法的汎関数の場合，すなわち

$$\Gamma_t = \Gamma_s\ \Gamma_{t-s}\circ\theta_s, \quad \Gamma_0 = 1, \quad 0 \le \Gamma_t \le 1 \tag{4}$$

を満たす場合について，ラフに述べよう．次を満たすと仮定する: ある関数 $r(t)$ と $\varphi(x)$ が存在して，s を固定して $t\to\infty$ とすると $r(t-s)/r(t)\to 1$ が成り立ち，かつ

$$\frac{P_x[\Gamma_t]}{r(t)\varphi(x)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{for all } x \tag{5}$$

が成り立つ．このとき，乗法性 (4) とマルコフ性より，

$$\frac{1}{r(t)}P_x[F_s\Gamma_t] = \frac{1}{r(t)}P_x\left[F_s\Gamma_s P_{X_s}[\Gamma_{t-s}]\right] = \frac{r(t-s)}{r(t)}P_x\left[F_s\varphi(X_s)\Gamma_s\frac{P_{X_s}[\Gamma_{t-s}]}{r(t-s)\varphi(X_s)}\right] \tag{6}$$

が成り立つ．そこでもし,「極限と期待値の順序交換」が許されたならば，$t\to\infty$ として

$$\frac{1}{r(t)}P_x[F_s\Gamma_t] \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} P_x[F_s\varphi(X_s)\Gamma_s] \tag{7}$$

が得られる．このことから，$(\varphi(X_s)\Gamma_s)_{s\ge 0}$ は $(\mathcal{F}_s, P_x)$-マルチンゲールであり，従って

$$P_x^\Gamma|_{\mathcal{F}_s} = \frac{\varphi(X_s)}{\varphi(x)}\Gamma_s\cdot P_x|_{\mathcal{F}_s} \tag{8}$$

によって確率測度 P_x^Γ が well-defined．式 (3) を $F_s\equiv 1$ とおいた式 (7) で割れば，penalisation

$$\frac{P_x[F_s\Gamma_t]}{P_x[\Gamma_t]} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} P_x^\Gamma[F_s] \tag{9}$$

が成立することがわかる．以上のことより，乗法的汎関数による penalisation においては $P_x[\Gamma_t]$ の漸近挙動が重要な役割を果たしていることがわかるだろう．

以上のことが成り立ったと仮定する．ここで $\Gamma_\infty := \lim_{t\to\infty}\Gamma_t$ とおく．この極限が存在することは，乗法性 (4) から $(\Gamma_t)_{t\ge 0}$ が非負減少なることによる．さらに，

$$P_x^\Gamma(\Gamma_\infty > 0) = 1 \quad \text{for all } x \tag{10}$$

を仮定する．そうして

$$\mathscr{P}_x := \frac{\varphi(x)}{\Gamma_\infty}1_{\{\Gamma_\infty>0\}}\cdot P_x^\Gamma \quad \text{on } \bigvee_t\mathcal{F}_t \tag{11}$$

によって $\bigvee_t\mathcal{F}_t$ 上のシグマ有限測度 $\mathscr{P}_x^\Gamma$ を定める．

定理 1 ([18]). 以上のことを全て満たすものが二つあったとし，$\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ とする．$\Gamma^{(i)}$ に対応するものを $r^{(i)}, \varphi^{(i)}, \mathscr{P}^{(i)}$ と書くこととし，ある関数 $\psi(x)$ と定数 $c>0$ が存在して，

$$\frac{\psi(X_t)}{\varphi^{(i)}(X_t)} \le c, \quad \frac{\psi(X_t)}{\varphi^{(i)}(X_t)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \mathscr{P}_x^{\Gamma^{(i)}}\text{-a.e. for all } x \text{ and for } i=1,2 \tag{12}$$

が成り立ったとする．このとき，

$$\mathscr{P}_x^{(1)} = \mathscr{P}_x^{(2)} \quad \text{on } \{\Gamma_\infty^{(1)}>0\}\cap\{\Gamma_\infty^{(2)}>0\}. \tag{13}$$

2 Filtrationの完備化

今までの議論ではfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$は座標過程によって生成される自然なfiltrationとした．しかしながら，考察するものによっては完備化が必要となることが多い．例えば，càdlàg modificationの存在や局所時間の連続versionの存在において，adaptednessも要請しようとすると完備性を要する．

そこで多くの場合，filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$の完備化によって**usual condition**を満たすfiltration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$を作る．このとき，$(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$は右連続であり，かつ$\mathcal{G}_0$は$\bigvee_t \mathcal{G}_t$に属する零集合の部分集合を全て含む．ところが，このような完備化はpenalisationの問題においては不都合である．というのは，もとの過程(X_t, P)と極限過程(X_t, Q)とが一般に$\bigvee_t \mathcal{F}_t$上では特異であるため，双方の過程に対して同時にusual conditionを満たすことは望めないのである．

Najnudel–Nikeghbali [7]はpenalisationのある種の一般論([6],[8],[9])を展開する際，この問題を解決する必要が生じ，usual conditionより弱いけれども望ましい結論が得られるような完備化を考え出した．

定義 2 ([1]). $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, P)$が**natural condition**を満たすとは，$(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$が右連続であり，かつ$\mathcal{G}_0$が$\bigcup_t \mathcal{G}_t$に属する零集合の部分集合をすべて含むことを言う．

定理 3 ([7]). $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$に対し，以下の条件を満たす最小の$(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, P')$が存在する(これを**natural enlargement**と呼ぶ):

(i) 任意の$t < \infty$に対し$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$が成り立ち，$P'|_{\mathcal{F}} = P$.

(ii) $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, P')$はnatural conditionを満たす．

次の定理は論文[7]には述べられていないが，上のことから従う．

系 4. 可測空間$(\Omega, \mathcal{F})$上のfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$と二つの確率測度$P, Q$が与えられたとし，$P, Q$について$\bigcup_t \mathcal{F}_t$上で零集合が共通すると仮定する．($\bigvee_t \mathcal{F}_t$上で特異であっても構わない．) このとき，$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$および$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, Q)$のnatural enlargementをそれぞれ$(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, P')$および$(\Omega, \mathcal{H}, (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}, Q')$とすれば，$\mathcal{G} = \mathcal{H}$および任意の$t$で$\mathcal{G}_t = \mathcal{H}_t$が成り立つ．

Proof. $(\Omega, \mathcal{G} \cap \mathcal{H}, (\mathcal{G}_t \cap \mathcal{H}_t)_{t\geq 0}, P')$もまた定理3の(i),(ii)を満たすことから，natural enlargementの最小性により結論を得る． □

3　一次元 Edwards' model

高分子鎖の Edwards' model [3] とは次のような確率測度を指す: (X_t, W) を $d(=1,2,3)$ 次元原点出発ブラウン運動の canonical representation とし，$T, \beta > 0$ に対し

$$\Gamma_T^\beta = \exp\left(-\beta \int_0^T \int_0^T \delta(X_s - X_u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\right) \tag{14}$$

(但し δ は原点 Dirac 関数) として

$$Q_T^\beta = \frac{\Gamma_T^\beta}{W[\Gamma_T^\beta]} \cdot W \tag{15}$$

で定まるもの．これらが意味を持っているとすれば，$T \to \infty$ としたときの Q_T^β の極限定理は penalisation の問題の一つである．

一次元のときは次の方法で意味づけが可能である: L_T^y を y での局所時間として

$$\int_0^T \int_0^T \delta(X_s - X_u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^\infty (L_T^y)^2 \mathrm{d}y \tag{16}$$

とすればよい．ここで，$y \mapsto L_T^y$ はコンパクト台を持つから右辺は well-defined である．二および三次元のときは Γ_T^β 自身は意味を持たないが，意味づけできることが知られている ($d=2$: Varadhan [4],[11]; $d=3$: Westwater [17], [16], Bolthausen [2])．

Najnudel [5] は一次元の Edwards' model について次を示した (二，三次元は open)．

定理 5 ([5]). 任意の $\beta > 0$ に対し，W と局所絶対連続なある確率測度 Q^β が存在して，

$$Q_T^\beta[F_s] \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} Q^\beta[F_s]. \tag{17}$$

Najnudel [5] は更に，極限確率測度 Q^β の特徴づけとして，局所絶対連続性

$$Q^\beta|_{\mathcal{F}_s} = D_s^\beta \cdot W|_{\mathcal{F}_s} \tag{18}$$

における密度 D_s^β の表示を得ている．

$$\mathcal{K}g(x) = 2g''(x) - \frac{2}{x}g'(x) - xg(x) \tag{19}$$

で作用素 $\mathcal{K}$ を定め，$\mathcal{K}$ の $L^2(x\mathrm{d}x)$ における固有値 $-\rho_0 > -\rho_1 \geq -\rho_2 \geq \cdots$ および対応する固有関数 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．$l > 0$ に対し，$(Y_l^y)_{y\in\mathbb{R}}$ は次のような過程とする:

- $(Y_l^{-y})_{y\geq 0}$ は 0 次元二乗ベッセル，出発点 l.
- $(Y_l^y)_{y\geq 0}$ はそれと独立な 2 次元二乗ベッセル，出発点 l.

各 $M > 0$ ついて，$[-M, M]$ の外で消える連続関数 f に対し

$$A_+^{\beta,M}(f) = \int_0^\infty \mathrm{d}l\ E\left[e_0\left(\beta^{1/3}Y_l^M\right)\exp\int_{-\infty}^M \left\{-\beta(Y_l^y + f(y))^2 + \rho_0\beta^{2/3}Y_l^y\right\}\mathrm{d}y\right] \tag{20}$$

と定め，$\check{f}(x) = f(-x)$ として $A_-^{\beta,M}(f) = A_+^{\beta,M}(\check{f})$ と定める．さらに，

$$A^{\beta,M}(f) = A_+^{\beta,M}(f) + A_-^{\beta,M}(f) \tag{21}$$

とおく．

定理 6 ([5]). 任意の $\beta > 0$ と任意の $f \in C_{c,+}(\mathbb{R})$ に対し，$A^{\beta,M}(f)$ は有限，正値，かつ $\operatorname{Supp} f \subset [-M, M]$ なる M の取り方に依存しない (よって $A^{\beta}(f)$ と書いてよい)．さらに，

$$D_s^{\beta} = \frac{A^{\beta}\left(L_s^{\bullet+X_s}\right)}{A^{\beta}(0)} \exp\left(\rho_0 \beta^{2/3} s\right) \tag{22}$$

が成り立つ．

参考文献

[1] K. Bichteler. *Stochastic integration with jumps*, volume 89 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[2] E. Bolthausen. On the construction of the three-dimensional polymer measure. *Probab. Theory Related Fields*, 97(1-2):81–101, 1993.

[3] S. F. Edwards. The statistical mechanics of polymers with excluded volume. *Proc. Phys. Soc.*, 85:613–624, 1965.

[4] J.-F. Le Gall. Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 314–331. Springer, Berlin, 1985.

[5] J. Najnudel. Construction of an Edwards' probability measure on $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. *Ann. Probab.*, 38(6):2295–2321, 2010.

[6] J. Najnudel and A. Nikeghbali. On some universal sigma finite measures and some extensions of Doob's optional stopping theorem. Preprint, arXiv:0906.1782, 2009.

[7] J. Najnudel and A. Nikeghbali. A new kind of augmentation of filtrations. ESAIM Probab. Stat., to appear. (arXiv:0910.4959).

[8] J. Najnudel and A. Nikeghbali. On some properties of a universal sigma-finite measure associated with a remarkable class of submartingales. Preprint, arXiv:0911.2571, 2009.

[9] J. Najnudel and A. Nikeghbali. On penalisation results related with a remarkable class of submartingales. Preprint, arXiv:0911.4365, 2009.

[10] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. *A global view of Brownian penalisations*, volume 19 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[11] J. Rosen. Tanaka's formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion. *Ann. Probab.*, 14(4):1245–1251, 1986.

[12] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time. II. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(3):295–360, 2006.

[13] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights. I. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(2):171–246, 2006.

[14] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Some penalisations of the Wiener measure. *Jpn. J. Math.*, 1(1):263–290, 2006.

[15] B. Roynette and M. Yor. *Penalising Brownian paths*, volume 1969 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[16] J. Westwater. On Edwards' model for polymer chains. III. Borel summability. *Comm. Math. Phys.*, 84(4):459–470, 1982.

[17] M. J. Westwater. On Edwards' model for long polymer chains. *Comm. Math. Phys.*, 72(2):131–174, 1980.

[18] K. Yano. In preparation.