

ファインマン-カッツ汎関数の重みつき対称安定過程における加法汎関数の大偏差原理

西森康人*

$(\{X_t\}_{t \geq 0}, P_x)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の指数 α ($0 < \alpha \leq 2$) の対称安定過程とし, ν, μ は加藤クラス ($\mathcal{K}_{d,\alpha}^\infty$) に属する正の測度とする. また, ν, μ にルヴェーズ対応する正の連続加法汎関数をそれぞれ A_t^ν, A_t^μ とする. このとき,

定理 1. (i) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}^d$ に対して,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E_x \left[e^{A_t^\mu}; \frac{A_t^\nu}{t} \in G \right] \geq - \inf_{z \in G} C^*(z).$$

(ii) 任意の開集合 $F \subset \mathbb{R}^d$ に対して,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E_x \left[e^{A_t^\mu}; \frac{A_t^\nu}{t} \in F \right] \leq - \inf_{z \in F} C^*(z).$$

ここで $C^*(z)$ は対数モーメント母関数 $C(\lambda)$ のルジャンドル変換である:

$$C(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E_x \left[\exp \left(A_t^{\lambda\nu} + A_t^\mu \right) \right], \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$C^*(z) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda z - C(\lambda)).$$

つまり, ファインマン - カッツ汎関数 $e^{A_t^\mu}$ により重み付けられた対称安定過程による加法汎関数 A_t^ν の大偏差原理が成り立つことを示す. そこで, ゲルトナー - エリスの定理を用いる. そのためには次の条件が必要となる.

- (I) 対数モーメント母関数の存在,
- (II) 対数モーメント母関数の微分可能性.

(I) については竹田 [1] によりその存在だけでなく, それがスペクトル関数 $C(\lambda)$, つまり対応するシュレーディンガー作用素のスペクトルのボトムにより表されることが知られている:

$$C(\lambda) = - \inf \left\{ \mathcal{E}^\alpha(u, u) - \lambda \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\nu - \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu \mid u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^\alpha), \int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx = 1 \right\}, \quad (1)$$

ここで, $(\mathcal{E}^\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\alpha))$ は指数 α ($0 < \alpha \leq 2$) の対称安定過程から生成されるディレクレ形式である. (II) についてはこのスペクトル関数 $C(\lambda)$ の微分可能性を論じる. その方法の概略を述べる. $C(\lambda) > 0$ となる部分に関しては, スペクトルが固有値になる (cf.[1]) ことから解析的摂動論により微分可能性が示される. また, $\lambda^+ = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid C(\lambda) = 0 \}$ なる点における微分可能性は [1] および [2] により確立された方法を用いる. [1] では次元が 1, 2 の場合ブラウン運動が再帰的であり従ってハリスの意味で再帰的であることから大島の不等

* 東北大学大学院理学研究科博士課程 2 年

式を用いて微分可能性が示されたことに注意する．そして非再帰的な安定過程を主要部にもつ場合は [2] によって，調和関数 h を構成し，ドゥーブの h -変換によって非再帰的なマルコフ過程から再帰的なそれを構成することにより [1] におけるハリスの意味での再帰性の議論に帰着することで解決された．そこで，(1) の可微分性もこれらの方法にならって示すことが具体的な方針である．

[2] にのっとって調和関数を構成するにあたり，次の点が [2] での状況と異なる点である．それは (1) の μ による効果が大きいときは $C(\lambda) > 0$ となりやすい，つまり $\lambda^+ < 0$ になり得るという点である．そこで， λ^+ が正の場合と負の場合に分けて λ^+ の特徴づけを行った．

補題 1. λ^+ は次のように特徴付けられる．

(i) $\lambda^+ < 0$ のとき，

$$\inf \left\{ \mathcal{E}^\alpha(u, u) - \lambda^+ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\nu \mid u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^\alpha), \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1 \right\} = 1. \quad (2)$$

(ii) $\lambda^+ \geq 0$ のとき，

$$\inf \left\{ \mathcal{E}^\alpha(u, u) \mid u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^\alpha), \lambda^+ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\nu + \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1 \right\} = 1. \quad (3)$$

このことから，任意の $\eta \in \mathcal{K}_{d,\alpha}^\infty$ に対して， $\mathcal{D}_e(\mathcal{E}^\alpha)$ から $L^2(\eta)$ への埋め込みがコンパクトである (cf. [2] 定理 3.4.) という事を用いて，それぞれ (2), (3) に一致する関数 $u_0 \in \mathcal{D}_e(\mathcal{E}^\alpha)$ をとることができる．この u_0 がシュレーディンガー作用素に対して調和であり，上にあげた一連の議論に持ち込んで微分可能性を示すことができる．

この定理は 1 次元ブラウン運動によって定義される pinned polymer に応用できる．ここで pinned polymer とは次の通りである． $(\{B_t\}_{t \geq 0}, P_0)$ を原点を出発点とする 1 次元ブラウン運動とする．また，

$$P_{\beta,t}(d\omega) = Z_{\beta,t}^{-1} \exp\left(\beta \int_0^t \delta_0(B_s(\omega)) ds\right) P_0(d\omega),$$

$$Z_{\beta,t} = E_0 \left[\exp\left(\beta \int_0^t \delta_0(B_s) ds\right) \right]$$

とおく．ブラウン運動の軌跡を polymer の鎖とみなし，特にある $\delta > 0$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{\beta,t} \left(\frac{\int_0^t \delta_0(B_s) ds}{t} > \delta \right) = 1$$

が成り立つとき pinned polymer という．この pinned polymer に関して大偏差原理を適用すれば，レート関数から δ の範囲を特定することができる．

参考文献

- [1] Masayosi Takeda, Asymptotic properties of generalized Feynman-Kac functionals, *Potential Analysis* **9** (1998) 261-291.
- [2] Masayosi Takeda, Kaneharu Tsuchida, Differentiability of spectral functions for symmetric α -stable processes, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 359, **8** (2007) 4031-4054.