

対称安定過程における 飛躍型 Feynman-Kac 処罰問題

松浦將國*

平成 22 年 11 月 11 日†

正值連続加法的汎関数 (PCAF) に飛躍を考慮した項を加えた場合の Feynman-Kac 処罰問題を考察している．具体的には次の通りである．

$(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x, \{X_t\}_{t \geq 0})_{x \in \mathbb{R}^n}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の α 対称安定過程 ($0 < \alpha < 2$) とし, μ はある加藤クラス¹に属しているとする．このとき, μ がルヴューズ測度となるような PCAF A_t^μ が存在する．さらに, K_1, K_2 を互いに交わらない $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト集合とし, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の二変数関数 F を次の通り²定める．

$$F(x, y) := \mathbf{1}_{K_1}(x)\mathbf{1}_{K_2}(y) + \mathbf{1}_{K_2}(x)\mathbf{1}_{K_1}(y) \quad (1)$$

また, 次の加法的汎関数 (AF) を考える．

$$A_t^{\mu+F} := A_t^\mu + \sum_{0 < u \leq t} F(X_{u-}, X_u) \quad (2)$$

このとき, 任意の M_s 可測な有界確率変数 S について, ある重み付けられた確率測度 $\tilde{\mathbb{P}}_x$ が存在して次が言えるか?

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_x \left[e^{A_t^{\mu+F}} S \right]}{\mathbb{E}_x \left[e^{A_t^{\mu+F}} \right]} = \tilde{\mathbb{E}}_x[S] \quad (3)$$

まず, 式 (2) の PCAF $A_t^{\mu+F}$ は一様可積分なマルチンゲール $\{M_t\}_{t \geq 0}$ と PCAF $A_t^{\mu+\mu_{F_1}}$ により, 次のように表せる．

$$e^{A_t^{\mu+F}} = M_t e^{A_t^{\mu+\mu_{F_1}}} \quad (4)$$

確率測度 $\mathbb{P}_x$ をマルチンゲール $\{M_t\}_{t \geq 0}$ で重み付けた確率測度を $\mathbb{P}_x^M$ とすると,

$$\mathbb{E}_x \left[e^{A_t^{\mu+F}} \right] = \mathbb{E}_x \left[M_t e^{A_t^{\mu+\mu_{F_1}}} \right] = \mathbb{E}_x^M \left[e^{A_t^{\mu+\mu_{F_1}}} \right]. \quad (5)$$

*東北大学大学院理学研究科数学専攻博士課程二年, メール: sa9d10@math.tohoku.ac.jp, ウェブサイト: <http://www.math.tohoku.ac.jp/~sa9d10/index.html>.

†研究集会「確率解析とその周辺」, 平成 22 年 11 月 11 日 - 13 日, 岡山大学理学部.

¹ β リゾルベントにより定まる, ある滑らかさを満たす正值ラドン測度族のこと.

²実際には, もう少し一般の場合の二変数関数を考えることも出来るが, 説明が著しく煩雑になるのでここでは割愛する.

一方, 対称安定過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ のディリクレ空間を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ とすると, レヴィ系 $(N, H)^3$ を用いて, 式 (4) の変形に連動したディリクレ形式は次の通りとなる.

$$\tilde{\mathcal{E}}(u, u) = \mathcal{E}(u, u) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (u(x) - u(y))^2 F_1(x, y) N(x, dy) \mu_H(dx), \quad u \in \mathcal{F} \quad (6)$$

ここに, $F_1 := e^F - 1$ であり, μ_{F_1} は次の通りに定まる測度である.

$$\mu_{F_1}(dx) := \left(\int F_1(x, y) N(x, dy) \right) \mu_H(dx) \quad (7)$$

また, 式 (6) の $\tilde{\mathcal{E}}$ を用いて, スペクトル関数 $\tilde{\lambda}$ を次のように定める.

$$\tilde{\lambda}(\theta) := \inf \left\{ \tilde{\mathcal{E}}_\theta(u, u); \int u^2 d(\mu + \mu_{F_1}) = 1 \right\} \quad (8)$$

このとき, $\tilde{\lambda}(0)$ の値が 1 より大きい, より小さい, 等しいかの三通りに場合分けし, それぞれ「劣臨界的」「優臨界的」「臨界的」と称する.

$\mathbb{P}_x^M$ に従う強マルコフ過程を $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ とし, その推移確率を $p^Y(t, x, y)$ とすると, 元の対称安定過程と同値になる. つまり, ある定数 $c > 1$ が存在して次が成立する.

$$c^{-1} p(t, x, y) \leq p^Y(t, x, y) \leq c p(t, x, y) \quad (9)$$

ここに, $p(t, x, y)$ は対称安定過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ の推移確率である. このとき, $p^Y(t, x, y)$ から定まるグリーン関数 G^Y も $p(t, x, y)$ から定まるそれと同値となる. よって, 上述の変換により得られた強マルコフ過程 $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x^M, \{Y_t\}_{t \geq 0})_{x \in \mathbb{R}^n}$ においても, 同一の加藤クラスで Feynman-Kac 処罰問題を考えることができる.

以上をまとめて, 次の定理を得る.

定理 1. 対称安定過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ について飛躍型 Feynman-Kac 処罰問題 (3) を考えることは, 強マルコフ過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ について次の Feynman-Kac 処罰問題を考えることと同等である.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_x^M[e^{A_t^{\mu+\mu_{F_1}}} S]}{\mathbb{E}_x^M[e^{A_t^{\mu+\mu_{F_1}}}] } = \mathbb{E}_x^{M, h}[S] \quad (10)$$

ここに, h は標準状態と呼ばれる狭義正值関数⁴である.

この定理の証明の概略を中心に本講演を行う.

³レヴィ核と呼ばれる二変数の積分核 N と PCAF $\{H_t\}_{t \geq 0}$ の組のこと. $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 上の対称安定過程の場合, $N(x, dy) = c_{\alpha, n} |x - y|^{\alpha-n} dy$, $H_t = t$ であり, $\{H_t\}_{t \geq 0}$ のルヴィューズ測度は $\mu_H(dx) = dx$ となることが知られている.

⁴例えば, 劣臨界的の場合, $h(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x^M[e^{A_t^{\mu+\mu_{F_1}}}]$ である.