Coupling methods for diffusion processes under time-dependent metric*

桒田 和正 (お茶の水女子大学人間文化創成科学研究科)

M を滑らかな多様体とする．また，$(g(t))_{t\in[T_0,T_1]}$ を M 上の完備 Riemann 計量の族とし，$(Z(t))_{t\in[T_0,T_1]}$ を M 上の滑らかなベクトル場の族とする．簡単のため，これらの量は時間パラメータ t にも滑らかに依存しているとする．$\Delta_{g(t)}$ を，計量 $g(t)$ で定まる Laplacian とする．生成作用素 $\mathscr{A}_t := \Delta_{g(t)} + Z(t)$ を持つ (時間非一様な)M 上の確率過程 $((X(t))_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in M})$ を，$\mathscr{A}_t$-拡散過程と呼ぶ．$\mathscr{A}_t$-拡散過程は，「$(t, X(t))$ が $\partial_t + \Delta_{g(t)}$ に付随する martingale 問題の解」と特徴づけられる (より強く，枠束上の SDE の強解としても構成できる)．$d_{g(t)}$ を，計量 $g(t)$ から定まる Riemann 距離とする．

第一の結果として，Kendall,Cranston らの研究にその端を発する，多様体上での反射カップリングの構成およびその評価を扱う．彼らの手法の改良版を拡張した帰結として，以下のような結果が前述の時間非一様な枠組で得られる．

定理 1 [1] ある $K \in \mathbb{R}$ で

$$(\nabla Z(t))^\flat + \partial_t g(t) \leq \mathrm{Ric}_{g(t)} - Kg(t) \tag{I}$$

が成り立つとする．ただし，$(\nabla Z(t))^\flat$ は $\nabla Z(t)$ の対称化とする．このとき，任意の $x_0, x_1 \in M$ に対して，$\mathscr{A}_t$-拡散過程のカップリング $(X_0(t), X_1(t))$ であって，$X_i(T_0) = x_i$ かつ

$$\mathbb{P}\left[\inf_{T_0\leq s\leq t} d_{g(s)}(X_0(s), X_1(s)) > 0\right] \leq \varphi_{t-T_0}(d(x,y)) \tag{II}$$

を任意の $t \in [T_0, T_1]$ で満たすものが存在する．ただし，$\varphi_s(z) := \chi\left(\dfrac{z}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{Ks}-1}{K}\right)^{-1/2}\right)$，$\chi(a) := \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2/2}dx$ とする．

注

(i) 計量 $g(t)$ が t に依存しない，すなわち $\partial_t g(t) \equiv 0$ のとき，(I) の条件は，(無限次元の)Bakry-Émery テンソル ($Z(t) \equiv 0$ なら Ricci テンソルに一致) が下から一様に K で押さえられていることを意味する．また，(I) は，$K = 0$, $Z(t) \equiv 0$ で不等号が等号のとき，後ろ向き Ricci 流の方程式になっている．

(ii) (II) の右辺は $\mathbb{P}\left[\inf_{T_0\leq s\leq t} \tilde{\rho}(s) > 0\right]$ に等しい．ただし，$\tilde{\rho}$ は以下の SDE の解 (Ornstein-Uhlenbeck 過程) とする:

$$\begin{cases} d\tilde{\rho}(t) = 2\sqrt{2}d\beta(t) - K\tilde{\rho}(t)dt, \\ \tilde{\rho}(T_0) = d(x,y). \end{cases}$$

*研究集会「確率過程とその周辺」(2010 年 11 月 11 日〜11 月 13 日，於岡山) 講演予稿

第二の結果として，後ろ向き Ricci 流の下での，(正規化された)Perelman の $\mathscr{L}$-距離とカップリングの関係について述べる．以下，$T_0 \geq 0$ かつ $Z(t) \equiv 0$ とし，さらに以下の 2 条件を仮定する．

(i) $\partial_t g(t) \leq 2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}$ (後ろ向き Ricci 流),

(ii) 曲率テンソル $\mathrm{Rc}_{g(t)}$ が，(計量 $g(t)$ について) 時空間一様に有界．

$T_0 \leq s < t \leq T_1$, $\gamma : [s,t] \to M$ について，$\mathscr{L}(\gamma)$ を

$$\mathscr{L}(\gamma) := \int_s^t \sqrt{u}\left(|\dot\gamma(u)|^2_{g(u)} + R_{g(u)}(\gamma(u))\right) du$$

で定める．ここで，$R_{g(u)}$ はスカラー曲率とする．つまり，$R_{g(u)} = \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}_{g(u)}$．ここで，上の定義に現れる曲線 γ のパラメータを時間と考え，γ は $(s,\gamma(s))$ と $(t,\gamma(t))$ 時空内でつなぐ曲線と解釈するのが自然であることを注意しておく．$(s,x),(t,y) \in [T_0,T_1] \times M$ に対して，Perelman の $\mathscr{L}$-距離 $L(s,x;t,y)$ を

$$L(s,x;t,y) := \inf\{\mathscr{L}(\gamma) \mid \gamma : [s,t] \to M,\, \gamma(s)=x, \gamma(t)=y\}$$

と定める．L は一般に非負ではないが，Riemann 距離とよく似た振る舞いをし，対応する概念として,「minimizer($\mathscr{L}$-測地線) の存在」「第一，第二変分公式」「指数補題 (第二変分の比較定理)」「特異点 ($\mathscr{L}$-最小跡) の特徴付け」などが知られている．スケールパラメータ τ_0, τ_1 を，$T_0 \leq \tau_0 < \tau_1 \leq T_1$ となるよう取る．このパラメータにより L を正規化した関数 $\Theta_t(x,y)$ を以下で定める (ただし $m = \dim M$):

$$\Theta_t(x,y) := 2\left(\sqrt{\tau_1 t} - \sqrt{\tau_0 t}\right) L(\tau_0 t, x; \tau_1 t, y) - 2m\left(\sqrt{\tau_1 t} - \sqrt{\tau_0 t}\right)^2.$$

この量と Brown 運動のカップリングの相関として，以下が得られる．

定理 2 [2] $x_0, x_1 \in M$ に対して，*$g(t)$-Brown* 運動のカップリング $(X_0(\tau_0 t), X_1(\tau_1 t))$ で，$X_i(\tau_i) = x_i$ かつ $\Theta_t(X_0(\tau_0 t), X_1(\tau_1 t))$ が優マルチンゲールになるものが存在する．特に，任意の単調非減少凹関数 Φ について，$\mathbb{E}\left[\Phi(\Theta_t(X_0(\tau_0 t), X_1(\tau_1 t)))\right]$ は t について単調非増大になる．

定理 2 より特に，Topping[3] による，熱分布間の $\mathscr{L}$-輸送コストの時間単調性が従う．

参考文献

[1] K. Kuwada, Coupling by reflection of diffusion processes via discrete approximation under a backward Ricci flow, preprint.

[2] K. Kuwada and R. Philipowski, Coupling of Brownian motions and Perelman's $\mathscr{L}$-functional, preprint.

[3] P. Topping, $\mathscr{L}$-optimal transportation for Ricci flow, *J. reine angew. Math.* **636** (2009), 93–122.