

Idempotent methods for dynamic programming PDEs in optimal control problems

貝瀬 秀裕 (名古屋大・情報)

実数において通常の和と積に換えて導入される演算で、結合則、分配則のような演算法則が成り立ち、かつ和に関して中等性を持つものが多くの制御問題で有用なことが知られている。そのような代数系は一般には idempotent semiring (semifield) として扱われるが、実数においては、和と積をそれぞれ $\max$ と $+$ (max-plus 代数), $\min$ と $+$ (min-plus 代数), $\min$ と $\max$ (min-max 代数) として定義される演算などがその典型である。本講演では、決定論的制御における Hamilton-Jacobi 偏微分方程式に対する max-plus 代数的手法を簡単に紹介し、その後、講演の大半を使って W.M. McEneaney 氏との最近の共同研究 [1], [2] から、確率制御問題における Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 偏微分方程式に対する min-plus 代数の演算特性を生かした状態空間の離散化に依らない数値解法に向けてのアプローチを述べる。

有限時間区間上の確率制御問題における次の HJB 偏微分方程式を考える：

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \mathcal{H}(x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) = 0, (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$V(T, x) = \Psi(x), x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

ここで $V(t, x)$ は未知関数, $\Psi(x)$ は与えられている終末条件とする。非線形項 $\mathcal{H}$ は具体的に次のように定義する：

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) \\ &= \inf_{u \in U} \min_{m \in \mathcal{M}} \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^m(x, u) \sigma^m(x, u)^T D_x^2 V(t, x)) + f^m(x, u) \cdot D_x V(t, x) + l^m(x, u) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

$U \subset \mathbb{R}^p$ は Borel 集合, $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ とし、各 $m \in \mathcal{M}$ に対して、 σ^m, f^m, l^m は m でパラメータ付けされた関数で、 $\sigma^m : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times l}$, $f^m : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $l^m : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 U と $\mathcal{M}$ は制御空間であるが、 U は連続的空間であり、制御問題におけるオリジナルの制御空間に対応し、 $\mathcal{M}$ は離散的空間で、非線形項 $\mathcal{H}$ を近似するパラメータとしての利用を想定している。非常に一般的な条件の下で確率制御問題における値関数は (1) と (2) の一意的な粘性解として特徴付けられるので、(1) と (2) を満たす粘性解を求める数値解析手法を開発することは制御理論の観点から重要である。HJB 偏微分方程式に対しては有限差分法などの状態空間変数の離散化に基づく方法も知られているが、ここでは状態空間変数 x の離散化に依らない手法を模索する。

まず時間変数を離散化して (1) と (2) の粘性解を近似する。そのために、時間区間 $[0, T]$ の分割 $\pi_N = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$ (分割幅 $\Delta_N = T/N = t_{k+1} - t_k, k = 0, 1, \dots, N-1$) を与え、 π_N に対応する離散時間確率制御問題の値関数 $V^N(t, x)$ を考える。すると粘性解の安定性定理の証明と同様の議論により、分割幅 Δ_N を小さくする、すなわち $N \rightarrow \infty$ とすると、 $V^N(t, x)$ は (1), (2) の一意的な粘性解 $V(t, x)$ に広義一様収束することが示せる。

与えられた分割幅 Δ_N (つまり固定した N) に対して、 $V^N(t_k, x)$ ($k = 0, 1, \dots, N$) を計算するアルゴリズムを導くことが次の目標である。 $V^N(t_k, x)$ ($k = 0, 1, \dots, N$) は終末条件を $V^N(t_N, x) = V^N(T, x) = \Psi(x)$ とし、動的計画原理を通じて時間に関して後ろ向きに帰納的に計算される。単純な形をもつ終末条件 $\Psi(x)$ から出発しても、複数回動的計画原理を適用した後に得られる $V^N(t_k, x)$

は非常に複雑な形を持つ可能性がある。そこで min-plus 代数の分配則が $\min$ と和の順序交換に対応することに着目し、この分配則の一般化を動的計画原理に適用することで各ステップにおける $V^N(t_k, x)$ が一定の形に保たれることを示す。もう少し詳しくこのことを述べると、もし $V^N(t_{k+1}, x)$ があるパラメータ集合 Z_{k+1} と Z_{k+1} でパラメータ付けされた関数族 $\{g_{k+1}(x, z_{k+1})\}_{z_{k+1} \in Z_{k+1}}$ を用いて

$$V^N(t_{k+1}, x) = \inf_{z_{k+1} \in Z_{k+1}} g_{k+1}(x, z_{k+1})$$

と表せているならば、 $V^N(t_{k+1}, x)$ から動的計画原理を通じて計算される $V^N(t_k, x)$ も適当なパラメータ集合 Z_k と関数族 $\{g_k(x, z_k)\}_{z_k \in Z_k}$ を用いて

$$V^N(t_k, x) = \inf_{z_k \in Z_k} g_k(x, z_k) \quad (4)$$

と表せる。したがって、終末条件 $\Psi(x)$ を $\Psi(x) = \inf_{z \in Z_T} g_T(x, z)$ の形からスタートすると各ステップにおいて (4) の形が保たれる。 $t = t_{k+1}$ で与えられたデータ Z_{k+1} と $g_{k+1}(x, z_{k+1})$ から Z_k と $g_k(x, z_k)$ を計算するアルゴリズムを idempotent distributive dynamic programming principle (IDDPP) と名付ける。特に affine dynamics と quadratic cost の場合を含むある問題のクラスにおいては、2 次関数で表現される終末条件 $\Psi(x) = \inf_{z \in Z_T} \{(1/2)x^T Q_T(z)x + b_T(z) \cdot x + c_T\}$ から出発すると、 $V^N(t_k, x)$ もある 2 次関数を用いて

$$V^N(t_k, x) = \inf_{z \in Z_k} \left\{ \frac{1}{2} x^T Q_k(z)x + b_k(z) \cdot x + c_k(z) \right\} \quad (5)$$

と表現できる。つまり各 $V^N(t_k, x)$ は 2 次関数によりある種の展開ができることを意味する。

複数回の動的計画原理の適用により複雑な形になるはずの $V^N(t_k, x)$ が (4) や (5) のような一定の形を保つことは、数値解析への応用を考えたとき有効な性質であると考ええる。またこれまでの議論は状態空間変数 x の離散化に依っていないことにも注意したい。(4) や (5) はこのような良い性質を持つ一方で、IDDPP を適用したときパラメータ集合 Z_{k+1} がたとえ有限集合であったとしても、次のステップではパラメータ集合 Z_k は連続濃度を持つ集合になってしまうという問題点がある。実際の数値解析への応用を考慮に入れたとき、各ステップにおいて $V^N(t_k, x)$ を表現する関数の個数を適切なサイズのパラメータ集合まで減ずる方法を考えることは重要である。関数族が 2 次関数で、非常に大きな有限パラメータ集合 $\bar{\mathcal{M}} = \{1, 2, \dots, \bar{M}\}$ により表現される関数

$$\min_{m \in \bar{\mathcal{M}}} \left\{ \frac{1}{2} x^T Q^m x + b^m \cdot x + c^m \right\}$$

が与えられたとき、ある誤差尺度と制約条件を導入して、あらかじめ設定した適切なサイズの濃度を持つパラメータ集合の中から最適なパラメータ集合を選ぶ方法を提案する。

参考文献

- [1] H. Kaise and W.M. McEneaney, Idempotent expansions for continous-time stochastic control: Compact control space, *to appear in 49th IEEE Conf. Decision and Contr.*, Atlanta (2010).
- [2] H. Kaise and W.M. McEneaney, Idempotent expansions for continuous-time stochastic control, *preprint*