

ベッセル過程の到達確率について

濱名 裕治 (熊本大学理学部)

実数 p に対して,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{p-1}{2x} \frac{d}{dx}$$

を生成作用素にもつ 1 次元拡散過程を p 次元ベッセル過程とよぶ. 特に, p が正の整数であるときは, p 次元ブラウン運動の半径方向の運動として表示できる. ベッセル過程を考えると, 次元 p よりも $\nu = p/2 - 1$ を用いるほうが便利なときが多い. この ν をベッセル過程の指数とよぶ.

正の数 r, R に対して, r から出発する指数 ν のベッセル過程が初めて R に到達する時刻を $\tau_{r,R}^\nu$ とする. $\tau_{r,R}^\nu$ のラプラス変換は Kent [4] によって求められており, $\lambda > 0$ に対して, 次が成立する.

(1) $q > 0, 0 < r < R$ のとき

$$E[e^{-\lambda \tau_{r,R}^\nu}] = \frac{r^{-\nu} I_\nu(r\sqrt{2\lambda})}{R^{-\nu} I_\nu(R\sqrt{2\lambda})}$$

(2) $q \in \mathbb{R}, 0 < R < r$ のとき

$$E[e^{-\lambda \tau_{r,R}^\nu}] = \frac{r^{-\nu} K_\nu(r\sqrt{2\lambda})}{R^{-\nu} K_\nu(R\sqrt{2\lambda})}$$

ただし, I_ν は第 1 種変形ベッセル関数, K_ν は第 2 種変形ベッセル関数である.

今, $p_{r,R}^\nu$ を $\tau_{r,R}^\nu$ の密度関数とする. p が正の整数で, $0 < r < R$ であるとき,

$$p_{r,R}^\nu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,k} r^{-\nu} J_\nu(j_{\nu,k} r/R)}{R^{2-\nu} J_{\nu+1}(j_{\nu,k})} e^{-j_{\nu,k}^2 t/2R^2},$$

であることがわかっている. (Borodin-Salminen [1, p.398] 参照) ここで, J_ν は第 1 種ベッセル関数で, 各 $k \geq 1$ に対して, $j_{\nu,k}$ は J_ν の正の零点である. $r = 0$ のときは, Ciesielski-Taylor [2] によって得られている. $0 < R < r$ の場合は, 1 次元および 3 次元のときのみがわかっている,

$$p_{r,R}^\nu(t) = \begin{cases} \frac{r-R}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(r-R)^2/2t} & p=1 \text{ のとき } (\nu = -1/2 \text{ のとき}) \\ \frac{R}{r} \frac{r-R}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(r-R)^2/2t} & p=3 \text{ のとき } (\nu = 1/2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である. (Itô-McKean [3, p.129], Le Gall [5] 参照)

今回は, 一般の $p \in \mathbb{R}$ に対して, $0 < R < r$ の場合を考える. 適当な関数 f に対して, そのラプラス変換を $\mathcal{L}[f]$ で表すことにする. $F_{r,R}^\nu$ を $\tau_{r,R}^\nu$ の分布関数, つまり

$$F_{r,R}^\nu(t) = \int_0^t p_{r,R}^\nu(s) ds$$

とするとき, $\tau_{r,R}^\nu$ のラプラス変換の公式より, $\lambda > 0$ に対して

$$\mathcal{L}[F_{r,R}^\nu](\lambda) = \left(\frac{r}{R}\right)^{-\nu} \frac{K_\nu(r\sqrt{2\lambda})}{\lambda K_\nu(R\sqrt{2\lambda})}$$

となることがわかる. 簡単のために, $G_{r,R}^\nu(t) = F_{r,R}^\nu(2R^2t)$, $\varrho = r/R$ とおくと,

$$\mathcal{L}[G_{r,R}^\nu](\lambda) = \frac{1}{\varrho^\nu} \frac{K_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})}{\lambda K_\nu(\sqrt{\lambda})}$$

となる. $\mu \in \mathbb{R}$ に対して, $K_\mu = K_{-\mu}$ であることに注意して, 右辺を逆変換することにより, 次が得られる.

定理. $t > 0$ に対して, 次が成立する.

(1) $\nu \geq 1$ のとき ($p \geq 4$ のとき)

$$G_{r,R}^\nu(t) = \frac{1}{\varrho^{2\nu}\sqrt{\pi t}} \int_{\varrho-1}^{\infty} e^{-x^2/4t} dx - \frac{1}{\varrho^\nu\sqrt{\pi t}} \sum_{j=1}^{[\nu]} \xi_j^\nu \int_{\varrho-1}^{\infty} e^{-x^2/4t+z_j^\nu x} dx$$

ただし, $z_1^\nu, z_2^\nu, \dots, z_{[\nu]}^\nu$ は K_ν の零点で,

$$\xi_j^\nu = \frac{K_\nu(\varrho z_j^\nu)}{z_j^\nu K_{\nu+1}(z_j^\nu)} \quad (j = 1, 2, \dots, [\nu])$$

である.

(2) $0 < \nu < 1$ のとき ($2 < p < 4$ のとき)

$$G_{r,R}^\nu(t) = \frac{1}{\varrho^{2\nu}\sqrt{\pi t}} \int_{\varrho-1}^{\infty} e^{-x^2/4t} dx$$

(3) $-1 < \nu \leq 0$ のとき ($0 < p \leq 2$ のとき)

$$G_{r,R}^\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{\varrho-1}^{\infty} e^{-x^2/4t} dx$$

(4) $\nu \leq -1$ のとき ($p \leq 0$ のとき)

$$G_{r,R}^\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{\varrho-1}^{\infty} e^{-x^2/4t} dx - \frac{1}{\varrho^\nu\sqrt{\pi t}} \sum_{j=1}^{[|\nu|]} \xi_j^{|\nu|} \int_{\varrho-1}^{\infty} e^{-x^2/4t+z_j^{|\nu|}x} dx$$

REFERENCES

- [1] A. N. Borodin and P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion*, 2nd ed., Birkhäuser, Basel, 2002.
- [2] Z. Ciesielski and S. J. Taylor, *First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 434–450.
- [3] K. Itô and H. P. McKean, *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [4] J. Kent, *Some probabilistic properties of Bessel functions*, Ann. Probab. **6** (1978), 760–770.
- [5] J. -F. Le Gall, *Sur une conjecture de M. Kac*, Probab. Th. Rel. Fields **78** (1988), 389–402.