ブラウン処罰を統一するシグマ有限測度について

神戸大理　矢野 孝次[a]

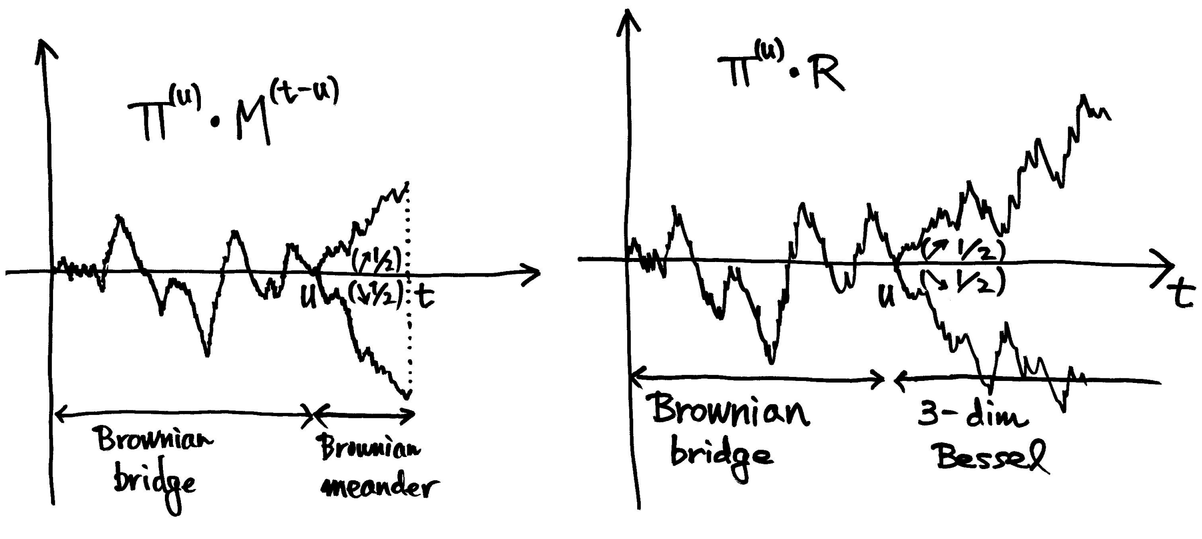
連続関数空間 $\Omega = C([0,\infty) \to \mathbb{R})$ 上の測度で次で与えられるものを考える:

$$\mathscr{W} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u}} \Pi^{(u)} \bullet R. \tag{1}$$

但し，$\Pi^{(u)}$ は原点から原点への長さ u のブラウン橋，R は 3 次元ベッセル過程の対称化，$\Pi^{(u)} \bullet R$ はそれらの道を独立に繋いでできる道の分布である．この測度 $\mathscr{W}$ は**ブラウン処罰問題** (see, e.g., [3]) に統一的な視点を与えるものとして Najnudel–Roynette–Yor らによって導入された ([2])．測度 $\mathscr{W}$ は Wiener 測度の長時間極限から得られるが，そのからくりはある時刻までで最後に原点を出た時刻についてのブラウン運動の経路分解公式である:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi t}{2}} W &\overset{\text{on } \mathcal{F}_t}{=} \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u}} \sqrt{\frac{t}{t-u}} \left(\Pi^{(u)} \bullet M^{(t-u)} \right) \\ &\xrightarrow[t\to\infty]{\text{roughly}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u}} \left(\Pi^{(u)} \bullet R \right) = \mathscr{W}. \end{aligned}$$

ここで，$M^{(s)}$ は対称化ブラウン彷徨過程 (meander) の分布である．確率測度 $\Pi^{(u)} \bullet M^{(t-u)}$ および $\Pi^{(u)} \bullet R$ は下図のような確率過程の分布である:



X を座標過程とし，$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \le t)$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_s : s \ge 0)$ とおく．測度 $\mathscr{W}$ は $\mathcal{F}_\infty$ 上では $\mathscr{W}$ はシグマ有限であるが，Wiener 測度と特異である．一方で，$\mathscr{W}$ に可積分な重みをかけて正規化した確率測度は各 $\mathcal{F}_t$ 上で Wiener 測度と絶対連続である．

ここでの目的は，$\mathscr{W}$ に対するカメロン・マルティン公式，すなわち平行移動に関する準不変性を示すことである．主定理は以下の通りである．

[a]E-mail: `kyano@math.kobe-u.ac.jp`　URL: `http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kyano/`

定理 1 ([4]). $h_t = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$, $f \in L^2 \cap L^1$ と仮定する．このとき，任意の非負 $\mathcal{F}_\infty$-可測関数 F に対し，

$$\mathscr{W}[F(X+h)] = \mathscr{W}[F(X)\mathcal{E}(f;X)] \tag{2}$$

が成り立つ．但し，$\mathcal{E}(f;X)$ は次で与えられる:

$$\mathcal{E}(f;X) = \exp\left(\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)^2\mathrm{d}s\right). \tag{3}$$

上の定理において現れる **Wiener 積分** $\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}X_s$ は，$f \in L^2(\mathrm{d}s) \cap L^1(\frac{\mathrm{d}s}{1+\sqrt{s}})$ のとき，階段関数近似によって構成される ([5]).

定理 1 の証明は次の手順で示される．

(i) $h_{t\wedge T} = \int_0^t f(s)1_{[0,T]}(s)\mathrm{d}s$ の場合．このときは $\mathscr{W}$ **のマルコフ性** ([2]):

$$\mathscr{W}\left[Z_t(X)F(\theta_t X)\right] = W\left[Z_t(X)\mathscr{W}_{X_t}[F(\cdot)]\right] \tag{4}$$

を用いることで Wiener 測度の場合に帰着される．

(ii) 一般の場合は，$T \to \infty$ とする．このとき指数汎関数 $\mathcal{E}(f;X)$ を含む期待値の評価が必要となるが，**Wiener 積分がガウスでない**ため工夫が必要である．次の定理が重要な役割を果たす.

定理 2 (舟木–針谷–Yor [1]). 任意の $f \in L^2$ と任意の非負凸関数 ψ に対し，

$$R\left[\psi\left(\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}\widehat{X}_s\right)\right] \le W\left[\psi\left(\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}X_s\right)\right] \tag{5}$$

が成り立つ．但し，W は Wiener 測度であり，$\widehat{X}_t = X_t - R^+[X_t]$ は**中心化ベッセル過程**と呼ばれる.

参考文献

[1] T. Funaki, Y. Hariya, and M. Yor. Wiener integrals for centered Bessel and related processes. II. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 1:225–240 (electronic), 2006.

[2] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. *A global view of Brownian penalisations*, volume 19 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[3] B. Roynette and M. Yor. *Penalising Brownian paths*, volume 1969 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 2009.

[4] K. Yano. Cameron–Martin formula for the σ-finite measure unifying Brownian penalisations. *preprint, arXiv:0909.5132*, 2009.

[5] K. Yano. Wiener integral for the coordinate process under the σ-finite measure unifying brownian penalisations. *preprint, arXiv:0909.5130*, 2009.