L^p-INDEPENDENCE OF SPECTRAL BOUNDS OF FEYNMAN-KAC SEMIGROUPS BY CONTINUOUS ADDITIVE FUNCTIONALS

デ レヴァ・ジャコモ, 金大弘, 桑江一洋
(熊本大学・自然科学研究科)

1. 序

この講演では倍 Feller(あるいは強 Feller) 過程の枠組みで狭い意味で滑らかな加藤クラス測度に対応する必ずしも (局所) 有界変動ではない連続加法的汎関数による Feynman-Kac 半群のスペクトル半径の L^p-独立性について最近得られた結果を報告する．Feynman-Kac 半群のスペクトル半径の L^p-独立性は $\mathbb{R}^d$ 上のシュレディンガー型作用素 $-\frac{1}{2}\Delta + V$, $V_+ := \max\{V, 0\} \in K_d^{loc}$, $V_- := \max\{-V, 0\} \in K_d$ に対して Simon [10] において最初に示され, Sturm [11, 12] によってリッチ曲率非負の完備 C^∞ 多様体の場合に拡張された．彼等の証明はシュレディンガー型作用素の熱核の評価に基づいている．一方で竹田 [13, 14, 15] は m-対称マルコフ過程の対称化測度 m の 1-位 Green-緊密性 (あるいは倍フェラー性の下で同値な言い換えとして $\mathbf{1}$ の 1-位レゾルヴェント $R_1\mathbf{1}$ が $C_\infty(E)$ に属すること) の下でマルコフ半群のスペクトル半径の L^p-独立性を Donsker-Varadhan 型の大偏差原理から導出した．また竹田 [16] は推移的かつ保存的な倍 Feller 過程の枠組みで 0-位 Green-緊密性をもつ加藤クラスに対応する (局所) 有界変動な連続加法的汎関数による Feynman-Kac 半群のスペクトル半径の L^p-独立性の必要十分条件を与えた．この結果も Donsker-Varadhan 型の大偏差原理に基づいており, その方法は純不連続な加法的汎関数による Feynman-Kac 半群, いわゆる非局所型 Feynman-Kac 半群においても有効であることが竹田–田原 [18], 田原 [21, 22] で示された．ごく最近, 竹田 [17] は強 Feller 過程の枠組みで 1-位 Green-緊密性をもつ滑らかな加藤クラス測度に対応する (局所) 有界変動な連続加法的汎関数と準不連続加法的汎関数による Feynman-Kac 半群に対する Donsker-Varadhan 型の大偏差原理が対称化測度の 1-位 Green-緊密性の下で成立することを得ている ([17] の後半では一次元拡散過程において L^p-独立性の例も調べている)．またこのことを正規化した形で竹田–田原 [19] において Varadhan の定式化した形の大偏差原理を得ている．

一方で必ずしも (局所) 有界変動とは限らない滑らかな加藤クラス測度に対応する連続加法的汎関数による Feynman-Kac 半群に対しては Donsker-Varadhan 型の大偏差原理による漸近挙動がブラウン運動の枠組みで竹田–Zhang [20] によって, また対称レヴィ過程の場合にある条件のもとで Zhang [23] によって示された．しかしながらこの場合での Feynman-Kac 半群に対するスペクトル半径の L^p-独立性はブラウン運動の場合ですらいままで示されていなかった．

我々の今回の報告は (一般的な枠組みで) 対称マルコフ過程において (局所) 有界変動とは限らない狭い意味で滑らかな測度に対応する連続加法的汎関数による Feynman-Kac 半群に対し,

- 倍 Feller 過程の枠組みで局所加藤クラスかつ拡張された加藤クラスに対応する場合;
- 強 Feller 過程の枠組みで加藤クラスに対応する場合;

のそれぞれにおいて Donsker-Varadhan 型の大偏差原理 (定理 2.1, 注意 2.1) や Feynman-Kac 半群のスペクトル半径の L^p-独立性が対称化測度 m の 1-位 Green-緊密性の下で成立すること (定理 2.2, 注意 2.2, これは [17] の前半の結果の拡張になる). また倍 Feller 過程の枠組みで Feynman-Kac 半群の L^2-スペクトル半径が非負なら, L^p-独立性が得られること, および保存性の元ではその逆が成立することを得た (定理 2.3, これは [16] の結果の拡張になる). これらの結果はいずれ [18],[21] を包括する形で拡張がなされる予定である.

2. 結果

E を局所コンパクト可分距離空間, m を台が全体の正値ラドン測度とし, ∂ を一点コンパクト化 $E_\partial := E \cup \{\partial\}$ における無限遠点とする. 便宜上 $\mathbf{1}_E$ (resp $\mathbf{1}_{E_\partial}$) でもって E (resp. E_∂) 上で 1 の値をとる定数関数とする. $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_t, X_t, \zeta, \mathbb{P}_x, x \in E)$ を E 上の m-対称ハント過程で対応する $L^2(E; m)$ 上のディリクレ形式を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が既約性を満たすことを仮定する. $\mathbf{X}$ が *Feller* **性**をもつとは $P_t(C_\infty(E)) \subset C_\infty(E)$ が任意の $t > 0$ でかつ $\lim_{t\to\infty} \|P_t f - f\|_\infty = 0$ が任意の $f \in C_\infty(E)$ で成立することとする. ここで $C_\infty(E)$ は無限遠で 0 となる連続関数の全体で $\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} |f(x)|$.

E 上の有界な連続関数の全体を $C_b(E)$ で表す. $\mathbf{X}$ が**強** *Feller* **性**をもつとは $P_t(\mathcal{B}_b(E)) \subset C_b(E)$ が任意の $t > 0$ で成立することとする. $\mathbf{X}$ が**倍** *Feller* **性**をもつとはそれが Feller 性かつ強 Feller 性をもつこととする. 以後 $\mathbf{X}$ は倍 Feller 性をもつとする. $\mathbf{X}$ の強 Feller 性と既約性から, E は連結であり $\mathbf{X}$ は m に関して次の絶対連続性を満たす; $P_t(x, N) = 0$ if $m(N) = 0$ for each $N \in \mathcal{B}(E)$, $x \in E$ and $t > 0$. このとき $\alpha \ge 0$ に対して, α-位のレゾルヴェント核 $r_\alpha(x, y)$ が全ての $x, y \in E$ で定義される (Lemma 4.2.4 in [7]). $r(x, y) := r_0(x, y)$ とする. 非負ボレル測度 ν に対し, $R_\alpha\nu(x) := \int_E r_\alpha(x, y)\nu(dy)$, $R\nu(x) := R_0\nu(x)$ とおく. ($R_\alpha f(x) = R_\alpha(fm)(x)$ for any $f \in \mathcal{B}_+(E)$ or $f \in \mathcal{B}_b(E)$). ν が **ディンキンクラス** (resp. **加藤クラス**) とはある $\alpha > 0$ で $\sup_{x\in E} R_\alpha\nu(x) < \infty$ (resp. $\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{x\in E} R_\alpha\nu(x) = 0$) が成立することし, ν が **局所加藤クラス**とは $\mathbf{1}_K\nu$ が任意のコンパクト集合 K に対して加藤クラスになることとする. また ν が**拡張された加藤クラス** とは $\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{x\in E} R_\alpha\nu(x) < 1$ が成立することとする. S^0_D (resp. S^0_K) によってディンキンクラス測度 (resp. 加藤クラス) 測度の族, S^0_{EK} (resp S^0_{LK}) でもって拡張された加藤クラス (resp. 局所加藤クラス) の族を表すことにする. 明らかに, $S^0_K \subset S^0_{EK} \subset S^0_D$ and $S^0_K \subset S^0_{LK}$. $\mathbf{X}$ はハント過程なのでそのレヴィ系 (N, H) が存在する. S_1 (resp. S_{00}) でもって狭い意味で滑らかな (resp. エネルギー有限でポテンシャルが有界な) 測度の全体とする (see (2.2.10) and p. 195 in [7]). ディンキンクラスのラドン測度 (従って 局所/拡張された加藤クラスのラドン測度) は S_1 に属する (Proposition 3.1 in [9]). $S^1_D := S^0_D \cap S_1$, $S^1_K := S^0_K \cap S_1$, $S^1_{EK} := S^0_{EK} \cap S_1$ かつ $S^1_{LK} := S^0_{LK} \cap S_1$ とおく.

$\alpha \ge 0$ に対して, 正値測度 $\nu \in S^0_K$ が α-**位のグリーン緊密性**をもつとは 任意の $\varepsilon > 0$ に対してコンパクト集合 K がとれて

$$\sup_{x\in E} R_\alpha(\mathbf{1}_{K^c}\nu)(x) = \sup_{x\in E} \int_{K^c} r_\alpha(x, y)\nu(dy) < \varepsilon.$$

が成立することとする. $\alpha > 0$ の場合レゾルヴェント方程式からこの定義は $\alpha > 0$ の取り方に依存しない. $S^0_{K^+_\infty}$ (resp. $S^0_{K_\infty}$) でもって 正位 (resp. 0-位) の Green-緊密な加藤クラス測度の全体とし, $S^1_{K^+_\infty} := S^0_{K^+_\infty} \cap S_1$ (resp. $S^1_{K_\infty} := S^0_{K_\infty} \cap S_1$) とおく.

$(\mathcal{E},\mathcal{F}_e)$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の**拡張されたディリクレ空間**とする．$f\in\mathcal{F}_e$ は準連続な m-変形 $\tilde{f}$ をもつ (see [7])．$f\in\mathcal{F}_e$ は常に準連続な m-変形をとっておくことにする．任意の $u\in\mathcal{F}_e$ に対して, 次の福島分解が成立する;

$$A_t^u = M_t^u + N_t^u \quad \text{for all } t\in[0,\infty[\quad \mathbb{P}_x\text{-a.s. for q.e. } x\in E. \tag{1}$$

ここで M^u はエネルギー有限なマルチンゲール加法的汎関数 (MAF in short) N^u はエネルギー 0 の連続加法的汎関数と呼ばれる．2 次変分過程 $\langle M^u\rangle$ は正値連続加法的汎関数になるのでそのルヴーズ測度を $\mu_{\langle u\rangle}$ によって表す．この講演では $u\in\mathcal{F}_e\cap C_\infty(E)$ を固定して使用して $\mu_{\langle u\rangle}\in S_K^1$ を仮定する．また技術的な理由から $\mathbf{X}$ は内部消滅を持たないとする．すると福島分解は次のように精密化することができる:

$$A_t^u = M_t^u + N_t^u \quad \text{for all } t\in[0,\infty[\quad \mathbb{P}_x\text{-a.s. for any } x\in E. \tag{2}$$

$\mu_+\in S_{LK}^1$ と $\mu_-\in S_{LK}^1\cap S_{EK}^1$ をとり $\mu:=\mu_+-\mu_-$ とする．我々が考える Feynman-Kac 半群は次のものである: $f\in\mathcal{B}_+(E)$

$$Q_tf(x) := \mathbb{E}_x[e^{N_t^u-A_t^\mu}f(X_t)] \quad \text{for } x\in E. \tag{3}$$

$(Q_t)_{t>0}$ に対応するレゾルヴェントを $(S_\alpha)_{\alpha>0}$ とする:

$$S_\alpha f(x) := \int_0^\infty e^{-\alpha t}Q_tf(x)dt \quad x\in E$$

for $f\in\mathcal{B}_+(E)$．また ∂ を罠として拡張した E_∂ 上の推移確率を $P_t^\partial(x,dy)$ とする; for $B\in\mathcal{B}(E_\partial)$,

$$P_t^\partial(x,B) = \begin{cases} P_t(x,B\setminus\{\partial\}) & x\in E \\ \delta_\partial(B) & x=\partial. \end{cases}$$

$\mathbf{X}_\partial=(X_t,\mathbb{P}_x^\partial,x\in E_\partial)$ を $P_t^\partial(x,dy)$ から決まるマルコフ過程とする．$\mathbf{X}_\partial$ は $\mathbf{X}$ に ∂ を墓地点として追加したものである．技術上の理由から $f\in\mathcal{B}_+(E_\partial)$ と $x\in E_\partial$ に対し

$$Q_t^\partial f(x) := \mathbb{E}_x^\partial[e^{N_t^u-A_t^\mu}f(X_t)] \text{ かつ } S_\alpha^\partial f(x) := \int_0^\infty e^{-\alpha t}Q_t^\partial f(x)dt. \tag{4}$$

と記し, 任意の E 上の関数 f は特に断りがなければ $f(\partial)=0$ として E_∂ 上の関数として扱う．この場合 $Q_tf(x)=Q_t^\partial f(x)$ for $x\in E$ and $f\in\mathcal{B}(E)$ となる．特に, $Q_t^\partial\mathbf{1}_{E_\partial}(x)=\mathbb{E}_x[e^{N_t^u-A_t^\mu}]$ かつ $Q_t^\partial\mathbf{1}_E(x)=Q_t\mathbf{1}_E(x)=\mathbb{E}_x[e^{N_t-A_t^\mu}:t<\zeta]$, $x\in E$ となる．ここで $A_t^\mu:=A_t^{\mu_+}-A_t^{\mu_-}$ で A^{μ_+} (resp. $A_t^{\mu_-}$) は $\mu_+\in S_{LK}^1$ (resp. $\mu_-\in S_{LK}^1\cap S_{EK}^1$) に対応する狭い意味での正値連続加法的汎関数である．$\mathcal{C}(\subset\mathcal{F}\cap C_0(E))$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の芯とする．次の $L^2(E;m)$ 上の 2 次形式 $(\mathcal{Q},\mathcal{C})$ を考える．

$$\mathcal{Q}(f,g) := \mathcal{E}(f,g)+\mathcal{E}(u,fg)+\int_E fgd\mu \quad \text{for } f,g\in\mathcal{C}.$$

この 2 次形式 $\mathcal{Q}$ は well-defined で $\mathcal{C}$ 上で下に有界な 2 次形式であり, (3) で定めた半群は $(\mathcal{Q},\mathcal{C})$ の $L^2(E;m)$ 上の閉包 $(\mathcal{Q},\mathcal{D}(\mathcal{Q}))$ に対応する強連続半群とみなせることが [2] における Corollaries 1.5, 1.8 and 1.9 の議論からわかっている．

$\mathcal{P}(E)$ を E 上のボレル確率測度の全体とする．レート関数 $I_{\mathcal{Q}}(\nu)$ を

$$I_{\mathcal{Q}}(\nu) := \begin{cases} \mathcal{Q}(\phi,\phi) & \text{if } \nu \ll m \text{ and } \phi := \sqrt{d\nu/dm} \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

で定め, $t < \zeta(\omega)$ を満たす $\omega \in \Omega$ に対して正規化された滞在時間分布 $L_t(\omega) \in \mathcal{P}(E)$ を

$$L_t(\omega)(A) := \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_A(X_s(\omega))ds \quad \text{for } A \in \mathcal{B}(E).$$

で定める．

定理 2.1. $\mu_{\langle u\rangle} \in S^1_K$, $\mu = \mu_+ - \mu_- \in S^1_{LK} - S^1_{LK} \cap S^1_{EK}$ を仮定する．

(i) このとき任意の開集合 $G \subset \mathcal{P}(E)$ と $x \in E$ に対し

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log \mathbb{E}_x[e^{N^u_t - A^\mu_t} : L_t \in G, t < \zeta] \geq -\inf_{\nu \in G} I_{\mathcal{Q}}(\nu). \tag{6}$$

(ii) $\mu_+ \in S^1_{LK} \cap S^1_{EK}$ を仮定すると任意のコンパクト集合 $K \subset \mathcal{P}(E)$ に対し,

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log \sup_{x\in E} \mathbb{E}_x[e^{N^u_t - A^\mu_t} : L_t \in K, t < \zeta] \leq -\inf_{\nu \in K} I_{\mathcal{Q}}(\nu). \tag{7}$$

(iii) $m \in S^1_{K^+_\infty}$ と $\mu_+ \in S^1_{LK} \cap S^1_{EK}$ を仮定すると任意の閉集合 $K \subset \mathcal{P}(E)$ に対して (7) が成立して特に

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log \mathbb{E}_x[e^{N^u_t - A^\mu_t} : t < \zeta] \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log \sup_{x\in E} \mathbb{E}_x[e^{N^u_t - A^\mu_t} : t < \zeta] = -\inf_{\nu \in \mathcal{P}(E)} I_{\mathcal{Q}}(\nu) \end{aligned} \tag{8}$$

を得る．

注意 2.1. さらに $\mu_\pm \in S^1_K$ なら $\mathbf{X}$ の Feller 性を用いずに定理 2.1 と同じ結果が成立する．

開集合 G を考え, $(\mathcal{E}_G, \mathcal{F}_G)$ を次で与える;

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G := \{u \in \mathcal{F} \mid u = 0 \text{ q.e. on } E \setminus G\}, \\ \mathcal{E}_G(u,v) := \mathcal{E}(u,v) \text{ for } u, v \in \mathcal{F}_G. \end{cases}$$

$(\mathcal{E}_G, \mathcal{F}_G)$ は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ のパート空間と呼ばれ $L^2(G;m)$ 上の正則ディリクレ形式になることが知られている．$\mathbf{X}$ の倍 Feller 性の下では [5] によって G が相対コンパクトな正則集合なら $R^G_1 \mathbf{1}_G \in C_\infty(G)$ となることが分っている．ここで G が正則とは $\mathbb{P}_x(\tau_G = 0) = 1$ for all $x \in E \setminus G$ が成立することで R^G_1 はパート過程 $\mathbf{X}_G$ の 1-位のレゾルヴェントで $\tau_G := \inf\{t > 0 \mid X_t \notin G\}$ は G から脱出時刻である．$f \in \mathcal{B}_b(G)$ に対して $Q^G_t f(x) := \mathbb{E}_x[e^{N^u_t - A^\mu_t} f(X_t) : t < \tau_G]$ とおくと G が相対コンパクトなら Q^G_t は $L^2(G;m)$ 上の 閉形式 $(\mathcal{Q}, \mathcal{F}_G)$ に対応する強連続半群になる．

$\|Q^G_t\|_{p,p}$ を $L^p(G;m)$ から $L^p(G;m)$ への Q^G_t の作用素ノルムとしてスペクトル半径を

$$\lambda_p(G) := \lambda_p(u,\mu)(G) := -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log \|Q^G_t\|_{p,p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

とおく．$G = E$ のときは記号 $\lambda_p(G)$ から '(G)' を省く．

定理 2.2. (i) $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_K$, $\mu=\mu_+-\mu_-\in S^1_{LK}\cap S^1_{EK}-S^1_{LK}\cap S^1_{EK}$ を仮定すると, スペクトル半径 $\lambda_p(u,\mu)$ $(1\le p\le\infty)$ は $m\in S^1_{K^+_\infty}$ ならば p に無関係である.

(ii) $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_K$, $\mu=\mu_+-\mu_-\in S^1_{LK}\cap S^1_{EK}-S^1_{LK}\cap S^1_{EK}$ とし G が正則な開集合で無限遠での挙動として $\lim_{G\ni x\to\partial}\mathbb{P}_x(\tau_G>0)=0$ が成立するとする. このときスペクトル半径 $\lambda_p(u,\mu)(G)$ $(1\le p\le\infty)$ は p に無関係である.

(iii) $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{LK}$, $\mu=\mu_+-\mu_-\in S^1_{LK}-S^1_{LK}$. とし G が正則な相対コンパクト開集合とする. このときスペクトル半径 $\lambda_p(u,\mu)(G)$ $(1\le p\le\infty)$ は p に無関係である.

注意 2.2. さらに $\mu_\pm\in S^1_K$ で G 上の部分過程 $\mathbf{X}_G$ が強 Feller 過程なら $\mathbf{X}$ の Feller 性を用いずに定理 2.2 と同じ結果が成立する.

定理 2.3. $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{K^+_\infty}$ と $\mu=\mu_+-\mu_-\in S^1_{LK}\cap S^1_{EK}-S^1_{K^+_\infty}$ を仮定する. $\lambda_2(u,\mu)\le 0$ ならば $\lambda_p(u,\mu)$ $(1\le p\le\infty)$ は p に無関係である. さらに $\mathbf{X}$ が保存的で $\mu_+\in S^1_{K^+_\infty}$ なら $\lambda_2(u,\mu)>0$ から $\lambda_\infty(u,\mu)=0$ を得て逆の主張が成立する.

系 2.1. $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{K^+_\infty}$, $\mu=\mu_+-\mu_-$ *with* $\mu_+=0$ と $\mu_-\in S^1_{K^+_\infty}$ とする. このとき $\lambda_2(0,0)\le 0$ ならば $\lambda_2(u,\mu)\le 0$, 特に $\lambda_p(u,\mu)$ $(1\le p\le\infty)$ は p に無関係になる. さらに $\mathbf{X}$ が推移的で, $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{K^+_\infty}$ かつ $\mu=\mu_+-\mu_-\in S^1_{K_\infty}-S^1_{K^+_\infty}$ ならば同様の結果が成立する.

References

[1] Z.-Q. Chen, P. J. Fitzsimmons, K. Kuwae and T.-S. Zhang, *Perturbation of symmetric Markov processes*, Probab. Theory Related Fields **140** (2008), no. 1-2, 239–275.

[2] ———, *On general perturbations of symmetric Markov processes*, J. Math. Pures et Appliquées **92** (2009), no. 4, 363–374.

[3] Z.-Q. Chen and K. Kuwae, *On doubly Feller property*, preprint (2008), Osaka J. Math. **46**, (2009), no. 4, 1–22.

[4] Z.-Q. Chen and T.-S. Zhang, *Girsanov and Feynman-Kac type transformations for symmetric Markov processes*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **38** (2002), no. 4, 475–505.

[5] K. L. Chung, *Doubly-Feller process with multiplicative functional,* Seminar on stochastic processes, 1985 (Gainesville, Fla., 1985), 63–78, Progr. Probab. Statist. **12**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1986.

[6] M. Fukushima, *On a decomposition of additive functionals in the strict sense for a symmetric Markov process*, Dirichlet forms and stochastic processes (Beijing, 1993), 155–169, de Gruyter, Berlin, 1995.

[7] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes.* de Gruyter Studies in Mathematics **19** Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[8] D. Kim, *Asymptotic properties for continuous and jump type's Feynman-Kac functionals*, Osaka J. Math. **37** (2000), no. 1, 147–173.

[9] K. Kuwae and M. Takahashi, *Kato class functions of Markov processes under ultracontractivity*, Potential theory in Matsue, 193–202, Adv. Stud. Pure Math. **44**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.

[10] B. Simon, *Schödinger semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. **7**, (1082), no. 3, 447–536.

[11] K.-Th. Sturm, *Schödinger semigroups on manifolds*, J. Funct. Anal. **118** (1993), no. 2, 309–350.

[12] ———, *On the L^p-spectrum of uniformly elliptic operators on Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. **118** (1993), no. 2, 442–453.

[13] M. Takeda, *On a large deviation for symmetric Markov processes with finite life time*, Stochastics Stochastic Reports, **59**, (1996), no. 1-2, 143–167.

[14] ———, L^p*-independence of the spectral radius of symmetric Markov semigroups*, Stochastic processes, physics and geometry: new interplays, II (Leipzig, 1999), 613–623, CMS Conf. Proc. **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[15] ———, *Conditional gaugeability and subcriticality of generalized Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **191** (2002), no. 2, 343–376.

[16] ———, L^p*-independence of spectral bounds of Schrödinger type semigroups*, J. Funct. Anal. **252** (2007), no. 2, 550–565.

[17] ———, *A large deviation principle for symmetric Markov processes with Feynman-Kac functional*, preprint, (2009).

[18] M. Takeda and Y. Tawara, L^p*-independence of spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups*, Forum Math. (2009), no. 6.

[19] ———, *A large deviation principle for symmetric Markov processes normalized by Feynman-Kac functionals*, preprint (2009).

[20] M. Takeda and T.-S. Zhang, *Asymptotic properties of additive functionals of Brownian motion*, Ann. Probab. **25** (1997), no. 2, 940–952.

[21] Y. Tawara, L^p*-independence of spectral bounds of Schrödinger type operators with non-local potentials*, J. Math. Soc. Japan, **62** (2010).

[22] ———, L^p*-independence of growth bounds of generalized Feynman-Kac semigroups*, Doctor's Degree Thesis, Mathematical Institute, Tohoku University, 2009.

[23] T.-S. Zhang, *Generalized Feynman-Kac semigroups, associated quadratic forms and asymptotic properties*, Potential Anal. **14** (2001), no. 4, 387–408.