

従属操作を行った Brown 運動による確率微分方程式に対する Malliavin 解析

慶應義塾大学大学院 理工学研究科
博士 2 年 楠岡誠一郎

Malliavin 解析は Brown 運動に対する確率微分方程式の解の密度関数の存在と滑らかさを調べる手法としてよく知られており、係数の滑らかさに応じて密度関数も滑らかさを持つことが得られる。そこで、安定過程に対する確率微分方程式に応用が次の問題として考えられる。次の N 次元確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX(t) = \sum_{k=1}^r \sigma_k(t, X(t-)) dZ_k(t) + b(t, X(t)) dt \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

ここで、 $\{Z_k\}$ は独立な r 個の回転不変な安定過程、係数は Lipschitz 連続とする。安定過程の指数は異なってもよいとする。この方程式が楕円性に関する条件を満たしているとする、係数が楕円性に関する条件を満たしていれば、解の時刻ごとの分布は密度関数を持つだろうと期待できる。

従属操作を行うことにより、Wiener 汎関数に対する Malliavin 解析を安定過程の汎関数に対して適用することができる。この方法により、安定過程による確率微分方程式の楕円性から解の密度関数の存在性を示すことができた。さらに、 $r = 1$ の場合、係数の滑らかさに応じて密度関数も滑らかさを持つことが示すことができた。より一般に、 $\{Z_k\}$ が Brown 運動の従属操作によって表せる場合、この議論は可能である。議論は 2 つのステップに分けて行う。1 つ目は non-random な time change を行った Brown 運動による確率微分方程式に対する Malliavin 解析についてである。2 つ目は条件付き確率の密度関数の滑らかさから、元の確率の密度関数の滑らかさを考えるというものである。このような手法をとるのは、従属操作で現れる subordinator からなる σ 加法族で条件付けて考えることにより、ほとんどすべての議論が Brown 運動による確率微分方程式の場合に帰着できるからである。

まず、条件付き確率から元の確率への密度関数の存在性と滑らかさの遺伝について述べる。 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、 $\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族とする。 P の $\mathcal{G}$ からなる正則条件付き確率が存在すると仮定し、 $p(\omega, d\omega')$ とする。

定理 1 正則条件付き確率 $p(\omega, d\omega')$ がほとんどすべての ω に対し、ある $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 ν に対して絶対連続であるとする。このとき、元の確率 P も ν に対して絶対連続である。

次に、滑らかさについて述べる。 $\Omega := \mathbf{R}^N$, $\mathcal{F} := \mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$ とし、ほとんどすべての ω に対して正則条件付き確率 $p(\omega, d\omega')$ が密度関数 $p(\omega, y)$ を持つとする。

定理 2 ほとんどすべての ω に対し $p(\omega, \cdot) \in C_b^n(\mathbf{R}^N)$ とし、ある確率変数 Y が存在して、 $E[Y] < \infty$ 、かつほとんどすべての ω に対し

$$\|\partial^\alpha p(\omega, \cdot)\|_\infty \leq Y(\omega), \quad |\alpha| \leq n.$$

とする。このとき、 P は密度関数 q を持ち、 $q \in C_b^n(\mathbf{R}^N)$ となる。

これらを使い、従属操作を行った Brown 運動による確率微分方程式の解の密度関数の存在とその滑らかさについて考えると、以下のことが得られる。

$T > 0$, r :正整数, $d_1, \dots, d_r$:正整数, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $Z_k(t)$ を右連続で左極限を持つ d_k -次元確率過程で $\{Z_k, k = 1, 2, \dots, r\}$ はすべて独立とする。

$(Z_k(t))$ は $(B_k(\tau_k(t)))$ と表せると仮定する。ただし、 $(B_k(t))$ を d_k -次元 Brown 運動, $\{\tau_k; k = 1, 2, \dots, r\}$ は 1-次元右連続増加過程で初期値が 0 であるようなもので、 $\{B_k; k = 1, 2, \dots, r\}$ と $\{\tau_k; k = 1, 2, \dots, r\}$ はすべて独立とする。

次の N -次元確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX(t) = \sum_{k=1}^r \sigma_k(t, X(t-)) dZ_k(t) + b(t, X(t)) dt \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\sigma_k \in C([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^{d_k} \otimes \mathbf{R}^N)$, $b \in C([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ である。このとき、解の密度関数の存在性に関して、次が得られる。

定理 3 $\sigma_k \in C^{0,1}([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^{d_k} \otimes \mathbf{R}^N)$, $\nabla \sigma_k$:有界, $b \in C^{0,1}([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$, ∇b :有界, ある $\varepsilon > 0$ が存在して

$$\sum_{k=1}^r \sigma_k(0, x_0) {}^t\sigma_k(0, x_0) \geq \varepsilon$$

とする。このとき、(1) に一意な解 $(X(t))$ が存在し、 $X(t)$ の分布は密度関数を持つ。

さらに、密度関数の滑らかさに関して、次が得られる。

定理 4 $\sigma_k \in C^{0,m+2}([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^{d_k} \otimes \mathbf{R}^N)$, $\nabla \sigma_k \in C_b^{0,m+1}([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N \otimes \mathbf{R}^{d_k} \otimes \mathbf{R}^N)$, $b \in C^{0,m+2}([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$, $\nabla b \in C_b^{0,m+1}([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N \otimes \mathbf{R}^N)$ とし、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、

$$\sigma(0, x_0) {}^t\sigma(0, x_0) \geq \varepsilon.$$

さらに次を仮定する。

$$\sum_{k=1}^r E [(\tau_k(T))^{-A} \exp(A\tau_k(T))] < \infty, \quad \text{for all } A \in [0, \infty). \quad (2)$$

このとき、(1) の解を $(X(t))$ とすると、 $X(t)$ の分布は密度関数 $q(x)$ をもち、 $q \in C_b^m(\mathbf{R}^N)$ 。

ここで、安定過程による確率微分方程式を考える。 $Z_k(t)$ を d_k -次元回転不変 α_k -安定過程で、 Z_k はすべて独立であるとし、確率微分方程式 (1) を考える。このとき、定理を使うには何も問題がないが、定理を使う場合には可積分性に関する条件 (2) が問題になり、実際、安定過程を $(B(\tau(t)))$ で表したとき、(2) を満たさない。しかし、 $r = 1$ の場合に限っては次を得ることができた。

定理 5 $r = 1$, $\sigma \in C^{0,m+2}([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^N)$, $\nabla \sigma \in C_b^{0,m+1}([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N \otimes \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^N)$, $b \in C^{0,m+2}([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$, $\nabla b \in C_b^{0,m+1}([0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N \otimes \mathbf{R}^N)$ とし、ある $\varepsilon > 0$ が存在して

$$\sigma(t, x) {}^t\sigma(t, x) \geq \varepsilon, \quad t \in [0, T], x \in \mathbf{R}^N.$$

とする。このとき、(1) の解を $(X(t))$ とすると、 $X(t)$ の分布は密度関数 $q(x)$ をもち、 $q \in C_b^m(\mathbf{R}^N)$ 。