Measure Contraction Property を持つ測度距離空間の放物型ハルナック不等式について

デレヴァ　ジャコモ

1　はじめに

$(X,\, d)$ を "曲率 $\geq \kappa$" の n 次元 Alexandrov 空間とし、μ を その上の n 次元 Hausdorff 測度、$(\mathcal{E},\, \mathcal{F})$ を $L^2(X;\mu)$ 上の標準的ディリクレ形式とする。このとき 桑江-町頭-塩谷 [1] によって、放物型ハルナック不等式が成立することが知られている。厳密に言えばこの結果は相対コンパクト集合 Y 上で成立するという主張である。これは Y 上での volume doubling property と弱い Poincaré 不等式を経由して示されている。今回、より強い結果が示すことができたので報告する。より一般的に、この講演では、[2] に定義した measure contraction property を持つ測度距離空間の場合を包含する枠組みを使って全体空間上での放物型ハルナック不等式を示す。 このハルナック不等式は用いることで熱核の評価を証明する。また、劣調和関数の平均値不等式を用いて曲率が一様に下に有界な Alexandrov 空間の場合に Lioville 型定理も示される。

2　結果

仮定. $(X,\, d,\, \mu)$ を可分測度距離空間で $\operatorname{supp}\mu = X$ で、 Ω を X の開集合と、$(\mathcal{E},\, \mathcal{F})$ を $C_0^{\mathrm{Lip}}(\Omega)$ の core を持つ $L^2(\Omega;\, \mu)$ 上の強局所正則ディリクレ形式として固定する。さらに、開球 $B(x,\, r) \subseteq \Omega$ の閉包は閉球 $\bar{B}(x,\, r)$ で、閉球 $\bar{B}(x,\, r)$ はコンパクトである。開球 $B(x,\, r) \subseteq \Omega$ を固定すると、任意の点 $y \in B(x,\, r)$ に対して、x から y へ結ぶ最短測地線がある。ある単調増加の写像 $\Theta :]0,\, +\infty[\longrightarrow [1,\, +\infty[$ と $\nu > 2$ は次の条件をみたすとする：$B(x,\, r_2) \subseteq \Omega$ をみたす任意の点 $x \in \Omega$ と $0 < r_1 \leq r_2$ に対して、

$$\mu(B(x,\, r_2)) \leq \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\nu} \Theta(r_2)\mu(B(x,\, r_1))$$

が成り立つ。Δ は $\mathcal{E}$ の生成作用素で、Γ は $\mathcal{E}$ のエネルギー測度とする。任意の点 $x \in \Omega$ に対して、$\Gamma(d_x) \leq \mu$ を仮定する。ここで d_x は $d_x(y) := d(x,\, y)$。最後に、ある単調増加の写像 $\Upsilon :]0,\, +\infty[\longrightarrow [1,\, +\infty[$ と $k > 1$ は次の条件をみたす。$B(x,\, kr) \subseteq \Omega$ をみたす任意の開球 $B(x,\, r)$ と $f \in \mathcal{F}(B(x,\, kr))$ に対して、

$$\int_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|^2 d\mu \leq \Upsilon(r) r^2 \int_{B(x,\, kr)} d\Gamma(f)$$

が成り立つ。ここで、$f_{B(x,r)}$ は

$$f_{B(x,r)} := \frac{1}{\mu(B(x,\,r))}\int_{B(x,r)} f\,d\mu$$

と言う関数である。

定理. ある $\tau > 0$ と $0 < \epsilon < \eta < \delta \leq 1$ と $\xi \in]0,\,1[$ を固定する。$\xi\eta - \epsilon < (1-\eta)(1-\xi)$ をみたす $0 < \epsilon < \eta < \delta \leq 1$ と $\xi \in]0,\,1[$ を固定すると、次の条件をみたす定数 $C_1(k)$ と $C_2(k)$ と $H_1(\nu,\,k,\,\tau,\,\delta,\,\eta,\,\epsilon,\,\xi)$, と $H_2(\nu,\,k)$ が存在する：任意の開球 $B(x,\,r) \subseteq \Omega$ と $s \in \mathbb{R}$ に対し、u が $]s-\tau r^2,\,s[\times B(x,\,r)$ 上の

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

の非負の局所解とする。このとき

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q_-} u \leq H_1(\nu,\,k,\,\tau,\,\delta,\,\eta,\,\epsilon,\,\xi)\,(\Theta(C_1 r)\Upsilon(C_2 r))^{H_2(\nu,\,k)}\operatorname*{ess\,inf}_{Q_+} u,$$

ここで

$$Q_- := \big]s-\delta\tau r^2,\,s-\eta\tau r^2\big[\times B(x,\,\xi r) \text{ と } Q_+ := \big]s-\epsilon\tau r^2,\,s\big[\times B(x,\,\xi r).$$

参考文献

[1] K. Kuwae, Y. Machigashira and T. Shioya, *Sobolev spaces, Laplacian, and heat kernel on Alexandrov spaces*, Math. Z. **238** (2001), no. 2, 269–316.

[2] K. Kuwae and T. Shioya, *Infinitesimal Bishop-Gromov condition for Alexandrov spaces*, to appear in Adv. Stud. Pure Math., 2009.

[3] G. De Leva, *Parabolic Harnack inequality and heat kernel estimates on metric spaces satisfying the measure contraction property*, preprint, 2009.