確率解析とその周辺

平成 21 年度科学研究費補助金科研費基盤研究 (B) (課題番号 21340030) 「無限次元確率解析と幾何学」(代表者：重川一郎)，科研費基盤研究 (A) (課題番号 21244009) 「無限次元確率解析の新展開とその応用」(代表者：会田 茂樹)，科研費基盤研究 (A) (課題番号 19204010) 「確率解析の理論と応用」(代表者：松本裕行) による表記の研究集会を開催しますのでご案内申し上げます.

日時: 2009 年 11 月 5 日 (木) 9:20 ～ 11 月 7 日（土）12:10
会場: 東北大学理学部数理科学記念館 (川井ホール)

プログラム

１１月５日（木）

9:20～10:10 稲浜譲 (名古屋大)
Laplace approximation for rough differential equation driven by fractional Brownian motion

10:20～11:10 林正史 (京都大)
Asymptotic expansion theorem for Wiener-Poisson variables

11:20～12:10 楠岡誠一郎 (慶応大)
従属操作を行った Brown 運動 による確率微分方程式に対する Malliavin 解析

13:30～14:20 廣島文生 (九州大)
Spectral analysis of relativistic Schrödinger operators by path measures, 1

14:30～15:20 原啓介 (ACCESS)
A rough path as a simple object and the problems, 1

15:40～16:30 桑江一洋 (熊本大)
L^p-independence of spectral bounds of Feynman-Kac semigroups by continuous additive functionals

16:40～17:10 Giacomo De Leva(熊本大)
TBA

１１月６日（金）

9:20～10:10 会田茂樹 (大阪大)
Vanishing of one dimensional L^2-cohomologies of loop groups

10:20～11:10 道工勇 (埼玉大)
変則的パラメータを伴う測度値マルコフ過程の挙動について

11:20～12:10 田村隆志 (大阪大)
Hypoellipticity and ergodicity of the Wonham filter as a diffusion process

13:30～14:20　廣島文生 (九州大)

Spectral analysis of relativistic Schrödinger operators by path measures, 2

14:30～15:20　原啓介 (ACCESS)

A rough path as a simple object and the problems, 2

15:40～16:30　池野裕介・重川一郎 (京都大)

非対称作用素のスペクトルについて

16:40～　ショートコミュニケーション

１１月７日（土）

9:20～10:10　矢野孝次 (神戸大)

ブラウン処罰を統一するシグマ有限測度について

10:20～11:10　日野正訓 (京都大)

An upper estimate of the martingale dimension for Sierpinski carpets

11:20～12:10　長田博文 (九州大)

Infinitely dimensional stochastic differential equations for interacting Brownian motions

世話人：重川一郎（京都大）, 会田茂樹（大阪大）, 針谷祐（東北大）, 松本裕行（名古屋大）

Laplace approximation for rough differential equations driven by fractional Brownian motion

Yuzuru Inahama (Nagoya University)

In this talk, we prove the Laplace-type asymptotics for the solution of a rough differential equation driven by (the lift of) fractional Brownian motion of the Hurst parameter H $(1/4 < H \leq 1/2)$. This is an "FBM version" of the well-known result for SDEs driven by the usual Brownian motion. In this talk. (stochastic or ordinary) differential equations are understood in the sense of the rough path theory. Unlike the BM case (i.e., $H = 1/2$), the third level paths (the triple integrals) of FBM also play a role when $1/4 < H \leq 1/3$.

A real-valued continuous stochastic process $(w_t^H)_{t\geq 0}$ starting at 0 is said to a fBm of Hurst parameter H if it is a centered Gaussian process with

$$\mathbb{E}[w_t^H w_s^H] = \frac{1}{2}[t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}], \qquad (s, t \geq 0)$$

This process has stationary increments $\mathbb{E}[(w_t^H - w_s^H)^2] = |t-s|^{2H}$ $(s, t \geq 0)$, and the scaling properity, i.e., for any $c > 0$, $(c^{-H} w_{ct}^H)_{t\geq 0}$ and $(w_t^H)_{t\geq 0}$ have the same law. Note that $(w_t^{1/2})_{t\geq 0}$ is the standard Brownian motion. For $d \geq 1$, a d-dimensional fBm is defined by $(w_t^{H,1}, \ldots, w_t^{H,d})_{t\geq 0}$, where $w^{H,i}$ $(i = 1, \ldots, d)$ are independent one-dimensional fBm's. Its law μ^H is a probability measure on $C_0([0,1], \mathbf{R}^d)$. (Actually, it is a measure on $C_0^{p-var}([0,1], \mathbf{R}^d)$ for $p > 1/H$, or on $C_0^{\alpha-hldr}([0,1], \mathbf{R}^d)$ for $\alpha < H$).

For $2 < p < 4$, let $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ denotes the geometric rough path space. A $\mathbf{R}^d$-valued finite variational path $x \in C_0^{1-var}([0,1], \mathbf{R}^d)$ is naturally lifted as an element of $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ by the followiing iterated Stieltjes integral;

$$X_{s,t}^j = \int_{s \leq t_1 \leq \cdots \leq t_j \leq t} dx_{t_1} \otimes dx_{t_2} \otimes \cdots \otimes dx_{t_j}. \tag{1}$$

We say X is the smooth rough path lying above x. In a similar way, for $1 < q < 2$, $x \in C_0^{q-var}([0,1], \mathbf{R}^d)$ can naturally be lifted, where the iterated integral in (1) should be understood in the sense of Young.

Let $1/4 < H \leq 1/2$ and $1/H < p < [1/H] + 1$. By Coutin-Qian's result $W^H(m)$. i.e., the lift of the dyadic piecewise linear approximation $w^H(m)$ converges a.s. in $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$. We write $W^H := \lim_{m\to\infty} W^H(m)$ and call it fractional Brownian rough path. (It is not possible to show the existence of W^H for $0 < H < 1/4$ with their method. In a framework different from the original one of T. Lyons, Tindel and Unterberger recently showed existence of the lift of w^H for any H. This "algebraic" framework was proposed by M. Gubinelli and might be interesting.)

In this talk, we consider the following RDE; for $\varepsilon > 0$,

$$dY_t^\varepsilon = \sigma(Y_t^\varepsilon)\varepsilon dW_t^H + \beta(\varepsilon, Y_t^\varepsilon)dt, \qquad Y_0^\varepsilon = 0. \tag{2}$$

Here, $\sigma \in C_b^\infty(\mathbf{R}^n, \mathrm{Mat}(n,d))$ and $\beta \in C_b^\infty([0,1] \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Note that C_b^∞ denotes the set of bounded smooth functions with bounded derivatives. Note also that Y^ε is a $G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$-valued random variable.

Let $\mathcal{H}^H$ be the Cameron-Martin subspace of the d-dimensional fBm $(w_t^H)_{0\leq t\leq 1}$. By Friz-Victoir's result, $k \in \mathcal{H}^H$ is of finite q-variation for any $(H + 1/2)^{-1} < q < 2$. Hence, the following ODE makes sense in the q-variational setting in the sense of the Young integration;

$$dy_t = \sigma(y_t)dk_t + \beta(0, y_t)dt, \qquad y_0 = 0.$$

Note that y is again of finite q-variation and we will write $y = \Psi(k)$.

Now we set the following assumptions. In short, we assume that there is only one point that attains minimum of F_Λ and the Hessian at the point is non-degenerate. These are typical assumptions for Laplace's method of this kind. The space of continuous paths in $\mathbf{R}^n$ with finite p-variation starting at 0 is denoted by $C_0^{p-var}([0,1], \mathbf{R}^n)$. Note that the self-adjoint operator A in the fourth assumption turns out to be Hilbert-Schmidt.

(H1): F and G are real-valued bounded continuous function on $C_0^{p-var}([0,1], \mathbf{R}^n)$ for some $p > 1/H$.

(H2): The function $F_\Lambda := F \circ \Psi + \| \cdot \|^2_{\mathcal{H}^H}/2$ attains its minimum at a unique point $\gamma \in \mathcal{H}^H$. We will write $\phi^0 = \Psi(\gamma)$.

(H3): F and G are $m+3$ and $m+1$ times Fréchet differentiable on a neighborhood $U(\phi^0)$ of $\phi^0 \in C_0^{p-var}([0,1], \mathbf{R}^n)$, respectively. Moreover, there are positive constants $M_1, M_2, \dots$ such that

$$\begin{aligned} |\nabla^j F(\eta)\langle z, \dots, z\rangle| &\leq M_j \|z\|^j_{p'-var}, \qquad (j = 1, \dots, m+3) \\ |\nabla^j G(\eta)\langle z, \dots, z\rangle| &\leq M_j \|z\|^j_{p'-var}, \qquad (j = 1, \dots, m+1) \end{aligned}$$

hold for any $\eta \in U(\phi^0)$ and $z \in C_0^{p-var}([0,1], \mathbf{R}^n)$.

(H4): At the point $\gamma \in \mathcal{H}^H$, the bounded self-adjoint operator A on $\mathcal{H}^H$, which corresponds to the Hessian $\nabla^2(F \circ \Psi)(\gamma)|_{\mathcal{H}^H \times \mathcal{H}^H}$, is strictly larger than $-\mathrm{Id}_{\mathcal{H}^H}$ (in the form sense).

Now we state our main theorem. Under these assumptions, the following Laplace-type asymptotics holds. (Below, $Y^{\varepsilon,1} = (Y^\varepsilon)^1$ denotes the first level path of Y^ε);

Theorem 1 *Let the coefficients $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Mat}(n,d)$ and $\beta : [0,1] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ be C_b^∞. Then, under Assumtions* **(H1)** *–* **(H4)***, we have the following asymptotic expansion as $\varepsilon \searrow 0$; there are real constants c and $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ such that*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\big[G(Y^{\varepsilon,1}) \exp\big(-F(Y^{\varepsilon,1})/\varepsilon^2\big)\big] \\ &\quad = \exp(-F_\Lambda(\gamma)/\varepsilon^2) \exp(-c/\varepsilon) \cdot \big(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \cdots + \alpha_m \varepsilon^m + O(\varepsilon^{m+1})\big). \end{aligned}$$

The proof is similar to the one for Brownian rough path (i.e., the case $H = 1/2$). The following facts are the keys; (i) A Fernique-type theorem for W^H. (ii) A Cameron-Martin-type for W^H. (iii) Taylor expansion for the Itô map or RDE (2) around the minimum point $\gamma \in \mathcal{H}^H$. However, (iii) was done in the speaker's previous paper.

For those who understand the proof for Brownian rough path, the most difficult part is perhaps how to treat elements of the Cameron-Martin space $\mathcal{H}^H$, in particular, the proof of the Hilbert-Schmidt property of the Hessian A. Thanks to Friz-Victoir's result, those Cameron-Martin paths are of finite q-variation for some $1 < q < 2$ such that $1/p + 1/q > 1$. Thus, we can use Young integration theory.

Consider the short time problem for the law of V_t, which is a unique solution of the following RDE;

$$dV_t = \sigma(V_t) dW^H_t + b(V_t) dt, \qquad Y_0 = 0.$$

Here, $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ is C_b^∞, which is independent of small parameter ε this time. By the scaling property of fractional Brownian rough path, the problem reduces to studying following RDE;

$$dY^\varepsilon_t = \sigma(Y^\varepsilon_t) \varepsilon dW^H_t + \varepsilon^{1/H} b(Y^\varepsilon_t) dt, \qquad Y^\varepsilon_0 = 0$$

Although fractional power of ε is involved, we can show that Theorem 1 above also holds for this case since $1/H \geq 1/2$. As a result, under certain mild assumptions, we can prove the Laplace-type asymptotics for the law of V_t as $t \searrow 0$.

Asymptotic expansion theorem of Watanabe for Wiener-Poisson variables.

Masafumi HAYASHI [1]
(Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University)

The asymptotic expansion theorem for Wiener functionals was obtained by S. Watanabe [1]. Using this, he studied the short time behavior of the fundamental solution to a heat equation. N. Yoshida[2], N, Kunitomo and A. Takahashi[3] have applied this theorem to mathematical finance.

In this talk, we shall discuss the asymptotic expansion theorem on the Wiener-Poisson space. As an application, we shall consider SDE with jumps

$$S_t^{(\epsilon)} = x_0 + \int_0^t b_0 \, S_{r-}^{(\epsilon)} \, dr + \epsilon \int_0^t a(\, S_{r-}^{(\epsilon)} \,) \diamond dZ_r,$$

where $\epsilon \in (0,1)$ and Z_t is a Lévy process, and give the following asymptotic expansion formula

$$\mathbf{E}[(K^{(\epsilon)} - S_{T_0}^{(\epsilon)})_+] \sim c_1\epsilon + c_2\epsilon^2 + \cdots ,$$

where $K^{(\epsilon)} = e^{bT_0} - \epsilon k_0$ $(k_0 > 0)$.

References

[1] Watanabe, S., Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels, Ann. Probab. 15 (1987), 1–39.

[2] Yoshida, N., Conditional expansions and their applications. Stochastic Process. Appl. 107 (2003), no. 1, 53–81.

[3] Kunitomo, N., Takahashi,A. . A Foundation of Mathematical Finance: Applications of Malliavin Calculus and Asymptotic Expansion: Toyo-keizai-Shinposha, (2003), (in Japanese).

[4] Hayashi, M. Asymptotic expansions for functionals of a Poisson random measure. Journal of Mathematics of Kyoto university, vol. 48, no. 1, pp.91–132, (2008).

[5] Hayashi,M and Ishikawa,Y "Composition with distributions of Wiener-Poisson variables and its asymptotic expansion" submitted

[1] This is joint work with Yasushi Ishikawa (Ehime university)

従属操作を行ったBrown運動による確率微分方程式に対する Malliavin解析

慶應義塾大学大学院　理工学研究科
博士２年　楠岡誠一郎

Malliavin 解析は Brown 運動に対する確率微分方程式の解の密度関数の存在と滑らかさを調べる手法としてよく知られており、 係数の滑らかさに応じて密度関数も滑らかさを持つことが得られる。そこで、安定過程に対する確率微分方程式に応用が次の問題として考えられる。次の N 次元確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \sigma_k(t, X(t-))dZ_k(t) + b(t, X(t))dt \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

ここで、$\{Z_k\}$ は独立な r 個の回転不変な安定過程、係数は Lipschitz 連続とする。安定過程の指数は異なっていてもよいとする。この方程式が楕円性に関する条件を満たしているとすると、係数が楕円性に関する条件を満たしていれば、解の時刻ごとの分布は密度関数を持つだろうと期待できる。

従属操作を行うことにより、Wiener 汎関数に対する Malliavin 解析を安定過程の汎関数に対して適用することができる。この方法により、安定過程による確率微分方程式の楕円性から解の密度関数の存在性を示すことができた。さらに、$r = 1$ の場合、係数の滑らかさに応じて密度関数も滑らかさを持つことが示すことができた。より一般に、$\{Z_k\}$ が Brown 運動の従属操作によって表せる場合、この議論は可能である。議論は２つのステップに分けて行う。１つ目は non-random な time change を行った Brown 運動による確率微分方程式に対する Malliavin 解析についてである。２つ目は条件付き確率の密度関数の滑らかさから、元の確率の密度関数の滑らかさを考えるというものである。このような手法をとるのは、従属操作で現れる subordinator からなる σ 加法族で条件付けて考えることにより、ほとんどすべての議論が Brown 運動による確率微分方程式の場合に帰着できるからである。

まず、条件付き確率から元の確率への密度関数の存在性と滑らかさの遺伝について述べる。$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし、$\mathscr{G}$ を $\mathscr{F}$ の部分 σ 加法族とする。P の $\mathscr{G}$ からなる正則条件付き確率が存在すると仮定し、$p(\omega, d\omega')$ とする。

定理 1 正則条件付き確率 $p(\omega, d\omega')$ がほとんどすべての ω に対し、ある $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の測度 ν に対して絶対連続であるとする。このとき、元の確率 P も ν に対して絶対連続である。

次に、滑らかさについて述べる。$\Omega := \mathbf{R}^N$, $\mathscr{F} := \mathscr{B}(\mathbf{R}^N)$ とし、ほとんどすべての ω に対して正則条件付き確率 $p(\omega, d\omega')$ が密度関数 $p(\omega, y)$ を持つとする。

定理 2 ほとんどすべての ω に対し $p(\omega, \cdot) \in C_b^n(\mathbf{R}^N)$ とし、ある確率変数 Y が存在して、$E[Y] < \infty$、かつほとんどすべての ω に対し

$$||\partial^\alpha p(\omega, \cdot)||_\infty \leq Y(\omega), \quad |\alpha| \leq n.$$

とする。このとき、P は密度関数 q を持ち、$q \in C_b^n(\mathbf{R}^N)$ となる。

これらを使い、従属操作を行った Brown 運動による確率微分方程式の解の密度関数の存在とその滑らかさについて考えると、以下のことが得られる。

$T>0$, r:正整数, $d_1,\cdots,d_r$:正整数, $(\Omega,\mathscr{F},P)$ を確率空間, $Z_k(t)$ を右連続で左極限を持つ d_k-次元確率過程で $\{Z_k, k=1,2,\cdots,r\}$ はすべて独立とする。

$(Z_k(t))$ は $(B_k(\tau_k(t)))$ と表せると仮定する。ただし、$(B_k(t))$ を d_k-次元 Brown 運動, $\{\tau_k; k=1,2,\cdots,r\}$ は 1-次元右連続増加過程で初期値が 0 であるようなもので、$\{B_k; k=1,2,\cdots,r\}$ と $\{\tau_k; k=1,2,\cdots,r\}$ はすべて独立とする。

次の N-次元確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \sigma_k(t,X(t-))dZ_k(t) + b(t,X(t))dt \\ X(0)=x_0, \end{cases} \tag{1}$$

ここで、$\sigma_k \in C([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^{d_k}\otimes\mathbf{R}^N)$, $b\in C([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$ である。このとき、解の密度関数の存在性に関して、次が得られる。

定理 3 $\sigma_k \in C^{0,1}([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^{d_k}\otimes\mathbf{R}^N)$, $\nabla\sigma_k$:有界、$b\in C^{0,1}([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$, ∇b:有界, ある $\varepsilon>0$ が存在して

$$\sum_{k=1}^{r}\sigma_k(0,x_0)\ {}^t\sigma_k(0,x_0)\geq\varepsilon$$

とする。このとき、(1) に一意な解 $(X(t))$ が存在し、$X(t)$ の分布は密度関数を持つ。

さらに、密度関数の滑らかさに関して、次が得られる。

定理 4 $\sigma_k \in C^{0,m+2}([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^{d_k}\otimes\mathbf{R}^N)$, $\nabla\sigma_k \in C_b^{0,m+1}([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N\otimes\mathbf{R}^{d_k}\otimes\mathbf{R}^N)$, $b\in C^{0,m+2}([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$, $\nabla b\in C_b^{0,m+1}([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N\otimes\mathbf{R}^N)$ とし、ある $\varepsilon>0$ が存在して、

$$\sigma(0,x_0)\ {}^t\sigma(0,x_0)\geq\varepsilon.$$

さらに次を仮定する。

$$\sum_{k=1}^{r} E\left[(\tau_k(T))^{-A}\exp\left(A\tau_k(T)\right)\right]<\infty,\quad \text{for all } A\in[0,\infty). \tag{2}$$

このとき、(1) の解を $(X(t))$ とすると、$X(t)$ の分布は密度関数 $q(x)$ をもち, $q\in C_b^m(\mathbf{R}^N)$.

ここで、安定過程による確率微分方程式を考える。$Z_k(t)$ を d_k-次元回転不変 α_k-安定過程で、Z_k はすべて独立であるとすし、確率微分方程式 (1) を考える。このとき、定理を使うには何も問題がないが、定理を使う場合には可積分性に関するの条件 (2) が問題になり、実際、安定過程を $(B(\tau(t)))$ で表したとき、(2) を満たさない。しかし、$r=1$ の場合に限っては次を得ることができた。

定理 5 $r=1$, $\sigma\in C^{0,m+2}([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^d\otimes\mathbf{R}^N)$, $\nabla\sigma_k\in C_b^{0,m+1}([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N\otimes\mathbf{R}^d\otimes\mathbf{R}^N)$, $b\in C^{0,m+2}([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$, $\nabla b\in C_b^{0,m+1}([0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N\otimes\mathbf{R}^N)$ とし、ある $\varepsilon>0$ が存在して

$$\sigma(t,x)\ {}^t\sigma(t,x)\geq\varepsilon,\quad t\in[0,T],\ x\in\mathbf{R}^N.$$

とする。このとき、(1) の解を $(X(t))$ とすると、$X(t)$ の分布は密度関数 $q(x)$ をもち、$q\in C_b^m(\mathbf{R}^N)$.

Spectral analysis of relativistic Schrödinger operators by path measures

Fumio Hiroshima

Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 Relativistic Schrödinger operators

Relativistic Schrödinger operator with vector potential a is defined formally by

$$H = \sqrt{(p-a)^2 + m^2} - m + V,$$

where $p = -i\nabla$, m denotes the mass of electron, $a = (a_1, ..., a_d)$ vector potentials and V an external potential. Let us suppose that $a \in (L^2_{loc}(\mathbb{R}^d))^d$. Then the kinetic term $\frac{1}{2}(p-a)^2$ can be defined through the quadratic form

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{d}((p_\mu - a_\mu)f, (p_\mu - a_\mu)g).$$

The self-adjoint operator associated with this quadratic form is denoted by h. Under the assumption $0 \le V_+ \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ and $0 \le V_-$ is relatively form bounded with respect to $(1/2)p^2$, Then the relativistic Schrödinger operator is rigorously defined as a self-adjoint operator on $L^2(\mathbb{R}^d)$ by

$$H = (2h + m^2)^{1/2} - m \dot{+} V_+ \dot{-} V_-.$$

Her $\dot{\pm}$ is the quadratic form sum. It can be seen that $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ is a form core of H. Let $(T_t)_{t\ge0}$ be the subordinator such that $\mathbb{E}[e^{-uT_t}] = e^{-t(\sqrt{2u+m^2}-m)}$. In addition to condistions on a and V mentioned above we furthermore suppose that $\nabla \cdot a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Then by using the Brownian motion $(B_t)_{t\ge0}$ independent of the subordinator the path integral representation of $(f, e^{-tH}g)$ is given by the theorem:

Theorem 1.1

$$(f, e^{-tH}g) = \int dx \mathbb{E}^{x,0}\left[\overline{f(B_{T_0})}g(B_{T_t})e^{S_t}\right],$$

where the exponent S_t is given by $-\int_0^t V(B_{T_s})ds - i\int_0^{T_t} a(B_s) \circ dB_s$.

From this path integral representation we can immediately see that e^{-tH} is ultarcontractive, i.e., e^{-tH} maps L^p to L^q for all $1 \le p \le q \le \infty$ for Kato-class potential. This procedure includes not only relativistic Schrödinger operators, but also Schrödinger operator with Bernstein function of the Laplacian, i.e. $\Psi(h) + V$ for any Bernstein function Ψ such that $\Psi(0) = 0$.

2 QFT version

The Pauli-Fierz model is a model in the so-called *nonrelativistic QED*. This model can be extended to a relativistic one. This model is defined on $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{F}$, where $\mathscr{F}$ is a boson Fock space. Define

$$H_P = \sqrt{(p \otimes 1 - \alpha A)^2 + m^2} - m + V \otimes 1 + 1 \otimes H_{\rm rad},$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$ is a coupling constant, A denotes the quantized radiation field given by $A_\mu = \int^\oplus A_\mu(x)dx$ under the identification $\mathscr{H} = \int^\oplus \mathscr{F} dx$ and $A_\mu(x)$ by

$$A_\mu(x) = \sum_{j=1}^{d-1} \int \frac{\hat\varphi(k)}{|k|} e_\mu(k,j) \left(a^\dagger(k,j) e^{-ikx} + a(k,j) e^{+ikx} \right) dk.$$

$a^\dagger$ and a satisfy canonical commutation relations $[a(k,j), a^\dagger(k',j')] = \delta_{jj'}\delta(k-k')$ and $\{e(k,1), ..., e(k,d-1), k/|k|\}$ forms an orthogonal base on the tangent space of the $d-1$-dimensional unit sphere at k, $T_k S_{d-1}$. $H_{\rm rad}$ is the free Hamiltonian defined by $H_{\rm rad} = \sum_{j=1}^{d-1} \int |k| a^\dagger(k,j) a(k,j) dk$. In the case of $\alpha = 0$ the Hamiltonian is

$$(\sqrt{p^2+m^2} - m + V) \otimes 1 + 1 \otimes H_{\rm rad}$$

and all the eigenvalues of $\sqrt{p^2+m^2} - m + V$ are embedded in the continuous spectrum since $\sigma(H_{\rm rad}) = [0, \infty)$. Thus to investigate the spectrum of H_P but with $\alpha \neq 0$ is a difficult issue. The boson Fock space is identified with the probability space $L^2(\mathscr{M}, \mu_0)$ with $\mathscr{M} = \oplus^d \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ endowed with a certain Gaussian measure μ such that $\mathbb{E}[\mathscr{A}_\mu(f)\mathscr{A}_\nu(g)] = \frac{1}{2}\int \bar{\hat{f}}(k)\hat{g}(k)\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|k|^2}\right) dk$. We can construct the functional integral representation of $(F, e^{-tH_P} G)$.

Theorem 2.1

$$(F, e^{-tH_P}G) = \int dx \mathbb{E}^{x,0}\left[e^{-\int_0^t V(B_{T_s})ds} \int_{\mathscr{E}} \overline{F(\mathscr{A}_0, B_{T_0})} G(\mathscr{A}_t, B_{T_t}) e^{-iK_t} d\mu \right], \quad F, G \in \mathscr{H}.$$

Here $\mathscr{E}$ is the Euclidean version of $\mathscr{M}$ and $\mathscr{A}_t$ is the Euclidean field with time t. The exponent is of the form $K_t = \int_0^t \mathscr{A}_s(\tilde\varphi(\cdot - B_s)) \cdot dB_s$, where $\tilde\varphi$ is the inverse Fourier transform of $\hat\varphi/|k|$.

By means of this functional integral representation we can show that

1 H_P is self-adjoint on $D(\sqrt{p^2} \otimes 1) \cap D(1 \otimes H_{\rm rad})$;

2 $e^{-i(\pi/2)N} e^{-tH_P} e^{i(\pi/2)N}$ is a positivity improving operator, where N denotes the number operator ;

3 the ground state of H_P is unique;

4 the ground state is spatially exponentially decay for $m > 0$.

These results can be extended to more general models of the form:

$$H_\Psi = \Psi\left(\frac{1}{2}(p \otimes 1 - \alpha A)^2\right) + V \otimes 1 + 1 \otimes H_{\rm rad}$$

with an arbitrary Bernstein functions.

A rough path as a simple object and the problems *

Keisuke HARA (ACCESS Co.,Ltd.)

ラフパス理論は比較的に複雑な構造を持つ理論で、確率解析学に対して応用されるときは特に、関数解析的なセットアップが分かり難い。

しかしこれは、ラフパスの一つの例として、確率微分方程式の解としてのパスのようなものを研究するに際して、複雑な関数空間の設定と繊細な取り扱いが必要になることが原因である。実際、ラフパス理論の研究対象であるラフパス自体は単純で、それだけに限っても興味深い問題を色々と持っている。今回の講演では、この単純な「オブジェクト」としてのラフパスに焦点をあて、その問題について紹介する。

大雑把に言って、ラフパスとは以下のような「もの」である。第一に、ラフパスはそのメンバとして、n 次のテンソル積空間に属する無限個の要素 $X_n(s,t) \quad (n = 0,1,2,\ldots; s < t)$ を持ち、つまり、これらテンソル積空間の無限直和に値をとる。第二に、その「もの」に対して、特徴的なメソッドが二つある。一つはその結合方法に関する代数的な法則 (Chen の等式) であり、もう一つはその「大きさ」を測る解析的な法則 (p-次変分的評価) である。

数学的に書くと、バナッハ空間 E と実数 $0 < s < t < 1$ に対して、$X_n(s,t)$ はテンソル積 $E^{\otimes n}$ に値をとる連続関数で、ラフパス X は $s < t$ に対して

$$X(s,t) = (1, X_1(s,t), X_2(s,t), \cdots)$$

でその値が計算される。また、代数的な関係として、任意の $0 < s < u < t < 1$ に対して

$$X(s,u) \otimes X(u,t) = X(s,t)$$

を満たし、解析的な評価として、

$$C(n/p)\|X_n(s,t)\| \leq \omega(s,t)^{n/p}$$

を、ある $p \geq 1$ に対して、任意の n と $s < t$ について満たす。ここに ω は「コントロール」と呼ばれる、良い性質を持つ劣加法的な連続関数である。

このラフパスを具体的に実現する方法は色々ある。例えば、重複積分の無限列はラフパスを構成するし、実際、この関数空間を基本に関数解析的議論を行なうことが、ラフパス理論の通常の議論である。しかし、実際ラフパスの定義には重複積分は必要でない。ラフパスは重複積分の無限列と、いくつかの視点からは全く同じふるまいをする「もの」であり、その意味では重複積分と区別がつかな

---

*科研費研究会「確率解析とその周辺」(東北大学) 2009 年 11 月 5 日 〜 7 日

いが、重複積分そのものではない。重複積分が定義できないはずのものを、重複積分と同じふるまいをする「もの」を通して定義するのが、ラフパス理論である。

ラフパス理論を強力に用いることができるとすれば、それは抽象的かつ一般的なラフパスに対する十分な研究があって、具体的な問題 (例えば、確率微分方程式の解の研究) に対しては、その一般理論の特別な例として扱える可能性が大きいからであろう。したがって、最も単純で一般的なラフパスに注目して研究することは大事である。その場合、ラフパスは重複積分自体とは特に関係ないし、関数空間的な議論も必要がない。またその研究は、上で述べたオブジェクトの定義以外に予備知識がほとんどいらないシンプルなパズルである、という意味で楽しい。

この講演では、ラフパス X に対してフーリエ変換型の積分、

$$\mathcal{F}[X] = \int^{t} e^{i\lambda u} dX_u$$

のような量を考えることができるかという問題 ([1])、また、ラフパスの条件が有限個の n について部分的に成り立つとき、ラフパスの存在を保証する拡張定理 (ラフパスの「第一定理」) を、確率化できるかという問題 ([2])、二つについての部分的結果を述べ、証明する。この二つは T. Lyons (Oxford) との共同研究である。このどちらにも、抽象的なラフパスを研究するときの主要なツールである、「二進点論法 (dyadic argument)」が使われる。

また、時間があれば、ごく最近、日野正訓氏 (京都大学) との共同研究で得られた、「新古典不等式の Lyons 予想の解決」について紹介する。これは第一定理の証明の鍵となる補題である新古典不等式の、ベストな定数についての予想だったが、肯定的に解決された ([3])。この証明は、全く初等的な複素解析のみでできる。

References

[1] K.Hara and T.Lyons, "On Fourier Transform of rough paths", preprint.

[2] K.Hara and T.Lyons, "On the expectation of the First Theorem in the rough path theory", preprint. (http://www.mars.dti.ne.jp/ kshara/arch.html)

[3] K.Hara and M. Hino, "Fractional order Taylor's series and the neo-classical inequality", preprint. (http://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/h̃ino/file/hh20.pdf)

L^p-INDEPENDENCE OF SPECTRAL BOUNDS OF FEYNMAN-KAC SEMIGROUPS BY CONTINUOUS ADDITIVE FUNCTIONALS

デ レヴァ・ジャコモ, 金大弘, 桑江一洋
(熊本大学・自然科学研究科)

1. 序

この講演では倍 Feller(あるいは強 Feller) 過程の枠組みで狭い意味で滑らかな加藤クラス測度に対応する必ずしも (局所) 有界変動ではない連続加法的汎関数による Feynman-Kac 半群のスペクトル半径の L^p-独立性について最近得られた結果を報告する．Feynman-Kac 半群のスペクトル半径の L^p-独立性は $\mathbb{R}^d$ 上のシュレディンガー型作用素 $-\frac{1}{2}\Delta+V$, $V_+:=\max\{V,0\}\in K_d^{loc}$, $V_-:=\max\{-V,0\}\in K_d$ に対して Simon [10] において最初に示され, Sturm [11, 12] によってリッチ曲率非負の完備 C^∞ 多様体の場合に拡張された．彼等の証明はシュレディンガー型作用素の熱核の評価に基づいている．一方で竹田 [13, 14, 15] は m-対称マルコフ過程の対称化測度 m の 1-位 Green-緊密性 (あるいは倍フェラー性の下で同値な言い換えとして $\mathbf{1}$ の 1-位レゾルヴェント $R_1\mathbf{1}$ が $C_\infty(E)$ に属すること) の下でマルコフ半群のスペクトル半径の L^p-独立性を Donsker-Varadhan 型の大偏差原理から導出した．また竹田 [16] は推移的かつ保存的な倍 Feller 過程の枠組みで 0-位 Green-緊密性をもつ加藤クラスに対応する (局所) 有界変動な連続加法的汎関数による Feynman-Kac 半群のスペクトル半径の L^p-独立性の必要十分条件を与えた．この結果も Donsker-Varadhan 型の大偏差原理に基づいており, その方法は純不連続な加法的汎関数による Feynman-Kac 半群, いわゆる非局所型 Feynman-Kac 半群においても有効であることが竹田–田原 [18], 田原 [21, 22] で示された．ごく最近, 竹田 [17] は強 Feller 過程の枠組みで 1-位 Green-緊密性をもつ滑らかな加藤クラス測度に対応する (局所) 有界変動な連続加法的汎関数と準不連続加法的汎関数による Feynman-Kac 半群に対する Donsker-Varadhan 型の大偏差原理が対称化測度の 1-位 Green-緊密性の下で成立することを得ている ([17] の後半では一次元拡散過程において L^p-独立性の例も調べている)．またこのことを正規化した形で竹田–田原 [19] において Varadhan の定式化した形の大偏差原理を得ている．

一方で必ずしも (局所) 有界変動とは限らない滑らかな加藤クラス測度に対応する連続加法的汎関数による Feynman-Kac 半群に対しては Donsker-Varadhan 型の大偏差原理による漸近挙動がブラウン運動の枠組みで竹田–Zhang [20] によって, また対称レヴィ過程の場合にある条件のもとで Zhang [23] によって示された．しかしながらこの場合での Feynman-Kac 半群に対するスペクトル半径の L^p-独立性はブラウン運動の場合ですらいままで示されていなかった．

我々の今回の報告は (一般的な枠組みで) 対称マルコフ過程において (局所) 有界変動とは限らない狭い意味で滑らかな測度に対応する連続加法的汎関数による Feynman-Kac 半群に対し,

- 倍 Feller 過程の枠組みで局所加藤クラスかつ拡張された加藤クラスに対応する場合;
- 強 Feller 過程の枠組みで加藤クラスに対応する場合;

のそれぞれにおいて Donsker-Varadhan 型の大偏差原理 (定理 2.1, 注意 2.1) や Feynman-Kac 半群のスペクトル半径の L^p-独立性が対称化測度 m の 1-位 Green-緊密性の下で成立すること (定理 2.2, 注意 2.2, これは [17] の前半の結果の拡張になる). また倍 Feller 過程の枠組みで Feynman-Kac 半群の L^2-スペクトル半径が非負なら, L^p-独立性が得られること, および保存性の元ではその逆が成立することを得た (定理 2.3, これは [16] の結果の拡張になる). これらの結果はいずれ [18],[21] を包括する形で拡張がなされる予定である.

2. 結果

E を局所コンパクト可分距離空間, m を台が全体の正値ラドン測度とし, ∂ を一点コンパクト化 $E_\partial := E \cup \{\partial\}$ における無限遠点とする. 便宜上 $\mathbf{1}_E$ (resp $\mathbf{1}_{E_\partial}$) でもって E (resp. E_∂) 上で 1 の値をとる定数関数とする. $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_t, X_t, \zeta, \mathbb{P}_x, x \in E)$ を E 上の m-対称ハント過程で対応する $L^2(E; m)$ 上のディリクレ形式を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が既約性を満たすことを仮定する. $\mathbf{X}$ が *Feller* **性**をもつとは $P_t(C_\infty(E)) \subset C_\infty(E)$ が任意の $t > 0$ でかつ $\lim_{t\to\infty} \|P_t f - f\|_\infty = 0$ が任意の $f \in C_\infty(E)$ で成立することとする. ここで $C_\infty(E)$ は無限遠で 0 となる連続関数の全体で $\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} |f(x)|$.

E 上の有界な連続関数の全体を $C_b(E)$ で表す. $\mathbf{X}$ が**強** *Feller* **性**をもつとは $P_t(\mathcal{B}_b(E)) \subset C_b(E)$ が任意の $t > 0$ で成立することとする. $\mathbf{X}$ が**倍** *Feller* **性**をもつとはそれが Feller 性かつ強 Feller 性をもつこととする. 以後 $\mathbf{X}$ は倍 Feller 性をもつとする. $\mathbf{X}$ の強 Feller 性と既約性から, E は連結であり $\mathbf{X}$ は m に関して次の絶対連続性を満たす; $P_t(x, N) = 0$ if $m(N) = 0$ for each $N \in \mathcal{B}(E)$, $x \in E$ and $t > 0$. このとき $\alpha \ge 0$ に対して, α-位のレゾルヴェント核 $r_\alpha(x, y)$ が全ての $x, y \in E$ で定義される (Lemma 4.2.4 in [7]). $r(x, y) := r_0(x, y)$ とする. 非負ボレル測度 ν に対し, $R_\alpha\nu(x) := \int_E r_\alpha(x, y)\nu(dy)$, $R\nu(x) := R_0\nu(x)$ とおく. ($R_\alpha f(x) = R_\alpha(fm)(x)$ for any $f \in \mathcal{B}_+(E)$ or $f \in \mathcal{B}_b(E)$). ν が **ディンキンクラス** (resp. **加藤クラス**) とはある $\alpha > 0$ で $\sup_{x\in E} R_\alpha\nu(x) < \infty$ (resp. $\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{x\in E} R_\alpha\nu(x) = 0$) が成立することし, ν が **局所加藤クラス**とは $\mathbf{1}_K\nu$ が任意のコンパクト集合 K に対して加藤クラスになることとする. また ν が**拡張された加藤クラス** とは $\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{x\in E} R_\alpha\nu(x) < 1$ が成立することとする. S_D^0 (resp. S_K^0) によってディンキンクラス測度 (resp. 加藤クラス) 測度の族, S_{EK}^0 (resp S_{LK}^0) でもって拡張された加藤クラス (resp. 局所加藤クラス) の族を表すことにする. 明らかに, $S_K^0 \subset S_{EK}^0 \subset S_D^0$ and $S_K^0 \subset S_{LK}^0$. $\mathbf{X}$ はハント過程なのでそのレヴィ系 (N, H) が存在する. S_1 (resp. S_{00}) でもって狭い意味で滑らかな (resp. エネルギー有限でポテンシャルが有界な) 測度の全体とする (see (2.2.10) and p. 195 in [7]). ディンキンクラスのラドン測度 (従って 局所/拡張された加藤クラスのラドン測度) は S_1 に属する (Proposition 3.1 in [9]). $S_D^1 := S_D^0 \cap S_1$, $S_K^1 := S_K^0 \cap S_1$, $S_{EK}^1 := S_{EK}^0 \cap S_1$ かつ $S_{LK}^1 := S_{LK}^0 \cap S_1$ とおく.

$\alpha \ge 0$ に対して, 正値測度 $\nu \in S_K^0$ が α-**位のグリーン緊密性**をもつとは 任意の $\varepsilon > 0$ に対してコンパクト集合 K がとれて

$$\sup_{x\in E} R_\alpha(\mathbf{1}_{K^c}\nu)(x) = \sup_{x\in E} \int_{K^c} r_\alpha(x, y)\nu(dy) < \varepsilon.$$

が成立することとする. $\alpha > 0$ の場合レゾルヴェント方程式からこの定義は $\alpha > 0$ の取り方に依存しない. $S_{K_\infty^+}^0$ (resp. $S_{K_\infty}^0$) でもって 正位 (resp. 0-位) の Green-緊密な加藤クラス測度の全体とし, $S_{K_\infty^+}^1 := S_{K_\infty^+}^0 \cap S_1$ (resp. $S_{K_\infty}^1 := S_{K_\infty}^0 \cap S_1$) とおく.

$(\mathcal{E},\mathcal{F}_e)$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の**拡張されたディリクレ空間**とする．$f\in\mathcal{F}_e$ は準連続な m-変形 $\tilde{f}$ をもつ (see [7])．$f\in\mathcal{F}_e$ は常に準連続な m-変形をとっておくことにする．任意の $u\in\mathcal{F}_e$ に対して, 次の福島分解が成立する;

$$A_t^u = M_t^u + N_t^u \quad \text{for all } t\in[0,\infty[\quad \mathbb{P}_x\text{-a.s. for q.e. } x\in E. \tag{1}$$

ここで M^u はエネルギー有限なマルチンゲール加法的汎関数 (MAF in short) N^u はエネルギー 0 の連続加法的汎関数と呼ばれる．2 次変分過程 $\langle M^u\rangle$ は正値連続加法的汎関数になるのでそのルヴーズ測度を $\mu_{\langle u\rangle}$ によって表す．この講演では $u\in\mathcal{F}_e\cap C_\infty(E)$ を固定して使用して $\mu_{\langle u\rangle}\in S_K^1$ を仮定する．また技術的な理由から $\mathbf{X}$ は内部消滅を持たないとする．すると福島分解は次のように精密化することができる:

$$A_t^u = M_t^u + N_t^u \quad \text{for all } t\in[0,\infty[\quad \mathbb{P}_x\text{-a.s. for any } x\in E. \tag{2}$$

$\mu_+\in S_{LK}^1$ と $\mu_-\in S_{LK}^1\cap S_{EK}^1$ をとり $\mu:=\mu_+-\mu_-$ とする．我々が考える Feynman-Kac 半群は次のものである: $f\in\mathcal{B}_+(E)$

$$Q_tf(x) := \mathbb{E}_x[e^{N_t^u-A_t^\mu}f(X_t)] \quad \text{for } x\in E. \tag{3}$$

$(Q_t)_{t>0}$ に対応するレゾルヴェントを $(S_\alpha)_{\alpha>0}$ とする:

$$S_\alpha f(x) := \int_0^\infty e^{-\alpha t}Q_tf(x)dt \quad x\in E$$

for $f\in\mathcal{B}_+(E)$．また ∂ を罠として拡張した E_∂ 上の推移確率を $P_t^\partial(x,dy)$ とする; for $B\in\mathcal{B}(E_\partial)$,

$$P_t^\partial(x,B) = \begin{cases} P_t(x,B\setminus\{\partial\}) & x\in E \\ \delta_\partial(B) & x=\partial. \end{cases}$$

$\mathbf{X}_\partial=(X_t,\mathbb{P}_x^\partial,x\in E_\partial)$ を $P_t^\partial(x,dy)$ から決まるマルコフ過程とする．$\mathbf{X}_\partial$ は $\mathbf{X}$ に ∂ を墓地点として追加したものである．技術上の理由から $f\in\mathcal{B}_+(E_\partial)$ と $x\in E_\partial$ に対し

$$Q_t^\partial f(x) := \mathbb{E}_x^\partial[e^{N_t^u-A_t^\mu}f(X_t)] \text{ かつ } S_\alpha^\partial f(x) := \int_0^\infty e^{-\alpha t}Q_t^\partial f(x)dt. \tag{4}$$

と記し, 任意の E 上の関数 f は特に断りがなければ $f(\partial)=0$ として E_∂ 上の関数として扱う．この場合 $Q_tf(x)=Q_t^\partial f(x)$ for $x\in E$ and $f\in\mathcal{B}(E)$ となる．特に, $Q_t^\partial\mathbf{1}_{E_\partial}(x)=\mathbb{E}_x[e^{N_t^u-A_t^\mu}]$ かつ $Q_t^\partial\mathbf{1}_E(x)=Q_t\mathbf{1}_E(x)=\mathbb{E}_x[e^{N_t-A_t^\mu}:t<\zeta]$, $x\in E$ となる．ここで $A_t^\mu:=A_t^{\mu_+}-A_t^{\mu_-}$ で A^{μ_+} (resp. $A_t^{\mu_-}$) は $\mu_+\in S_{LK}^1$ (resp. $\mu_-\in S_{LK}^1\cap S_{EK}^1$) に対応する狭い意味での正値連続加法的汎関数である．$\mathcal{C}(\subset\mathcal{F}\cap C_0(E))$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の芯とする．次の $L^2(E;m)$ 上の 2 次形式 $(\mathcal{Q},\mathcal{C})$ を考える．

$$\mathcal{Q}(f,g) := \mathcal{E}(f,g)+\mathcal{E}(u,fg)+\int_E fg\,d\mu \quad \text{for } f,g\in\mathcal{C}.$$

この 2 次形式 $\mathcal{Q}$ は well-defined で $\mathcal{C}$ 上で下に有界な 2 次形式であり, (3) で定めた半群は $(\mathcal{Q},\mathcal{C})$ の $L^2(E;m)$ 上の閉包 $(\mathcal{Q},\mathcal{D}(\mathcal{Q}))$ に対応する強連続半群とみなせることが [2] における Corollaries 1.5, 1.8 and 1.9 の議論からわかっている．

$\mathcal{P}(E)$ を E 上のボレル確率測度の全体とする. レート関数 $I_{\mathcal{Q}}(\nu)$ を

$$I_{\mathcal{Q}}(\nu) := \begin{cases} \mathcal{Q}(\phi, \phi) & \text{if } \nu \ll m \text{ and } \phi := \sqrt{d\nu/dm} \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

で定め, $t < \zeta(\omega)$ を満たす $\omega \in \Omega$ に対して正規化された滞在時間分布 $L_t(\omega) \in \mathcal{P}(E)$ を

$$L_t(\omega)(A) := \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_A(X_s(\omega))ds \quad \text{for } A \in \mathcal{B}(E).$$

で定める.

定理 2.1. $\mu_{\langle u \rangle} \in S_K^1$, $\mu = \mu_+ - \mu_- \in S_{LK}^1 - S_{LK}^1 \cap S_{EK}^1$ を仮定する.

(i) このとき任意の開集合 $G \subset \mathcal{P}(E)$ と $x \in E$ に対し

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x[e^{N_t^u - A_t^\mu} : L_t \in G, t < \zeta] \geq -\inf_{\nu \in G} I_{\mathcal{Q}}(\nu). \tag{6}$$

(ii) $\mu_+ \in S_{LK}^1 \cap S_{EK}^1$ を仮定すると任意のコンパクト集合 $K \subset \mathcal{P}(E)$ に対し,

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x\in E} \mathbb{E}_x[e^{N_t^u - A_t^\mu} : L_t \in K, t < \zeta] \leq -\inf_{\nu \in K} I_{\mathcal{Q}}(\nu). \tag{7}$$

(iii) $m \in S_{K_\infty^+}^1$ と $\mu_+ \in S_{LK}^1 \cap S_{EK}^1$ を仮定すると任意の閉集合 $K \subset \mathcal{P}(E)$ に対して (7) が成立して特に

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x[e^{N_t^u - A_t^\mu} : t < \zeta] \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x\in E} \mathbb{E}_x[e^{N_t^u - A_t^\mu} : t < \zeta] = -\inf_{\nu \in \mathcal{P}(E)} I_{\mathcal{Q}}(\nu) \end{aligned} \tag{8}$$

を得る.

注意 2.1. さらに $\mu_\pm \in S_K^1$ なら $\mathbf{X}$ の Feller 性を用いずに定理 2.1 と同じ結果が成立する.

開集合 G を考え, $(\mathcal{E}_G, \mathcal{F}_G)$ を次で与える;

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G := \{u \in \mathcal{F} \mid u = 0 \text{ q.e. on } E \setminus G\}, \\ \mathcal{E}_G(u, v) := \mathcal{E}(u, v) \text{ for } u, v \in \mathcal{F}_G. \end{cases}$$

$(\mathcal{E}_G, \mathcal{F}_G)$ は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ のパート空間と呼ばれ $L^2(G; m)$ 上の正則ディリクレ形式になることが知られている. $\mathbf{X}$ の倍 Feller 性の下では [5] によって G が相対コンパクトな正則集合なら $R_1^G \mathbf{1}_G \in C_\infty(G)$ となることが分っている. ここで G が正則とは $\mathbb{P}_x(\tau_G = 0) = 1$ for all $x \in E \setminus G$ が成立することで R_1^G はパート過程 $\mathbf{X}_G$ の 1-位のレゾルヴェントで $\tau_G := \inf\{t > 0 \mid X_t \notin G\}$ は G から脱出時刻である. $f \in \mathcal{B}_b(G)$ に対して $Q_t^G f(x) := \mathbb{E}_x[e^{N_t^u - A_t^\mu} f(X_t) : t < \tau_G]$ とおくと G が相対コンパクトなら Q_t^G は $L^2(G; m)$ 上の 閉形式 $(\mathcal{Q}, \mathcal{F}_G)$ に対応する強連続半群になる.

$\|Q_t^G\|_{p,p}$ を $L^p(G; m)$ から $L^p(G; m)$ への Q_t^G の作用素ノルムとしてスペクトル半径を

$$\lambda_p(G) := \lambda_p(u, \mu)(G) := -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|Q_t^G\|_{p,p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

とおく. $G = E$ のときは記号 $\lambda_p(G)$ から '(G)' を省く.

定理 2.2. (i) $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_K$, $\mu=\mu_+-\mu_-\in S^1_{LK}\cap S^1_{EK}-S^1_{LK}\cap S^1_{EK}$ を仮定すると, スペクトル半径 $\lambda_p(u,\mu)$ $(1\le p\le\infty)$ は $m\in S^1_{K^+_\infty}$ ならば p に無関係である.

(ii) $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_K$, $\mu=\mu_+-\mu_-\in S^1_{LK}\cap S^1_{EK}-S^1_{LK}\cap S^1_{EK}$ とし G が正則な開集合で無限遠での挙動として $\lim_{G\ni x\to\partial}\mathbb{P}_x(\tau_G>0)=0$ が成立するとする. このときスペクトル半径 $\lambda_p(u,\mu)(G)$ $(1\le p\le\infty)$ は p に無関係である.

(iii) $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{LK}$, $\mu=\mu_+-\mu_-\in S^1_{LK}-S^1_{LK}$. とし G が正則な相対コンパクト開集合とする. このときスペクトル半径 $\lambda_p(u,\mu)(G)$ $(1\le p\le\infty)$ は p に無関係である.

注意 2.2. さらに $\mu_\pm\in S^1_K$ で G 上の部分過程 $\mathbf{X}_G$ が強 Feller 過程なら $\mathbf{X}$ の Feller 性を用いずに定理 2.2 と同じ結果が成立する.

定理 2.3. $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{K^+_\infty}$ と $\mu=\mu_+-\mu_-\in S^1_{LK}\cap S^1_{EK}-S^1_{K^+_\infty}$ を仮定する. $\lambda_2(u,\mu)\le 0$ ならば $\lambda_p(u,\mu)$ $(1\le p\le\infty)$ は p に無関係である. さらに $\mathbf{X}$ が保存的で $\mu_+\in S^1_{K^+_\infty}$ なら $\lambda_2(u,\mu)>0$ から $\lambda_\infty(u,\mu)=0$ を得て逆の主張が成立する.

系 2.1. $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{K^+_\infty}$, $\mu=\mu_+-\mu_-$ *with* $\mu_+=0$ と $\mu_-\in S^1_{K^+_\infty}$ とする. このとき $\lambda_2(0,0)\le 0$ ならば $\lambda_2(u,\mu)\le 0$, 特に $\lambda_p(u,\mu)$ $(1\le p\le\infty)$ は p に無関係になる. さらに $\mathbf{X}$ が推移的で, $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{K^+_\infty}$ かつ $\mu=\mu_+-\mu_-\in S^1_{K_\infty}-S^1_{K^+_\infty}$ ならば同様の結果が成立する.

References

[1] Z.-Q. Chen, P. J. Fitzsimmons, K. Kuwae and T.-S. Zhang, *Perturbation of symmetric Markov processes*, Probab. Theory Related Fields **140** (2008), no. 1-2, 239–275.

[2] ———, *On general perturbations of symmetric Markov processes*, J. Math. Pures et Appliquées **92** (2009), no. 4, 363–374.

[3] Z.-Q. Chen and K. Kuwae, *On doubly Feller property*, preprint (2008), Osaka J. Math. **46**, (2009), no. 4, 1–22.

[4] Z.-Q. Chen and T.-S. Zhang, *Girsanov and Feynman-Kac type transformations for symmetric Markov processes*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **38** (2002), no. 4, 475–505.

[5] K. L. Chung, *Doubly-Feller process with multiplicative functional,* Seminar on stochastic processes, 1985 (Gainesville, Fla., 1985), 63–78, Progr. Probab. Statist. **12**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1986.

[6] M. Fukushima, *On a decomposition of additive functionals in the strict sense for a symmetric Markov process*, Dirichlet forms and stochastic processes (Beijing, 1993), 155–169, de Gruyter, Berlin, 1995.

[7] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes.* de Gruyter Studies in Mathematics **19** Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[8] D. Kim, *Asymptotic properties for continuous and jump type's Feynman-Kac functionals*, Osaka J. Math. **37** (2000), no. 1, 147–173.

[9] K. Kuwae and M. Takahashi, *Kato class functions of Markov processes under ultracontractivity*, Potential theory in Matsue, 193–202, Adv. Stud. Pure Math. **44**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.

[10] B. Simon, *Schödinger semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. **7**, (1082), no. 3, 447–536.

[11] K.-Th. Sturm, *Schödinger semigroups on manifolds*, J. Funct. Anal. **118** (1993), no. 2, 309–350.

[12] ———, *On the L^p-spectrum of uniformly elliptic operators on Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. **118** (1993), no. 2, 442–453.

[13] M. Takeda, *On a large deviation for symmetric Markov processes with finite life time*, Stochastics Stochastic Reports, **59**, (1996), no. 1-2, 143–167.

[14] ______, *L^p-independence of the spectral radius of symmetric Markov semigroups*, Stochastic processes, physics and geometry: new interplays, II (Leipzig, 1999), 613–623, CMS Conf. Proc. **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[15] ______, *Conditional gaugeability and subcriticality of generalized Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **191** (2002), no. 2, 343–376.

[16] ______, *L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger type semigroups*, J. Funct. Anal. **252** (2007), no. 2, 550–565.

[17] ______, *A large deviation principle for symmetric Markov processes with Feynman-Kac functional*, preprint, (2009).

[18] M. Takeda and Y. Tawara, *L^p-independence of spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups*, Forum Math. (2009), no. 6.

[19] ______, *A large deviation principle for symmetric Markov processes normalized by Feynman-Kac functionals*, preprint (2009).

[20] M. Takeda and T.-S. Zhang, *Asymptotic properties of additive functionals of Brownian motion*, Ann. Probab. **25** (1997), no. 2, 940–952.

[21] Y. Tawara, *L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger type operators with non-local potentials*, J. Math. Soc. Japan, **62** (2010).

[22] ______, *L^p-independence of growth bounds of generalized Feynman-Kac semigroups*, Doctor's Degree Thesis, Mathematical Institute, Tohoku University, 2009.

[23] T.-S. Zhang, *Generalized Feynman-Kac semigroups, associated quadratic forms and asymptotic properties*, Potential Anal. **14** (2001), no. 4, 387–408.

Vanishing of one dimensional L^2-cohomologies of loop groups

Shigeki Aida
Osaka University

D を $\mathbb{R}^n$ の連結かつ単連結な開集合とする[1]．β を D 上の滑らかな 1-form で $d\beta = 0$ を仮定する．このとき D 上の滑らかな関数 F が定数差を除いて一意に定まり $dF = \beta$ となる．これは例えば次のように証明される．

(i) $D = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ と D を連結な開集合 U_i の和で表す．ただし，$D_k = \cup_{i=1}^{k} U_i$ とおくと $D_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$ となるように取る．

(ii) 各 U_i 上で $df_i = \beta$ となる滑らかな関数の存在を示す．U_i は連結なので，f_i は定数差を除いて一意に決まることに注意する．

(iii) f_i $(1 \quad i \quad k)$ を適当に選んで (すなわち定数を適当に決めて)D_k 上の滑らかな関数 F_k が存在して $F_k = f_i$ on U_i $(1 \quad i \quad k)$ となると仮定する．このとき，$D_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$ なので一つの連結成分 C_0 を取りその上で f_{k+1} と F_k が一致するように f_{k+1} を選ぶ．

(iv) D_{k+1} 上の滑らかな関数 F_{k+1} が存在して $F_{k+1} = F_k$ on D_k, $F_{k+1} = f_{k+1}$ となることを示す．

以上が示されればこの操作を繰り返して D 上の滑らかな関数 F で $dF = \beta$ となるものの存在が示される．さて (i), (ii) に関しては U_i として凸な開集合 (例えば開球) を取れば成立することが示せる．(iv) のステップが自明でない．つまり，$D_k \cap U_{k+1}$ の連結成分が二つ以上あるとき，C_0 以外の連結成分の一つ C_1 を取る．$x_0 \in C_0, x_1 \in C_1$ としたとき $f_{k+1}(x_0) = F_k(x_0)$ だが $f_{k+1}(x_1) = F_k(x_1)$ となるかが自明でないのである．しかし，これは D の単連結性から従う．D_k の中の滑らかなパス $c_0(t)$ $(0 \quad t \quad 1)$, U_{k+1} の中の滑らかなパス $c_1(t)$ $(0 \quad t \quad 1)$ で $c_0(0) = c_0(0) = x_0$, $c_1(1) = c_1(1) = x_1$ なるものを取る．このとき単連結性から c_0, c_1 を補間する滑らかなホモトピー c_s が存在する．ここで Stokes の公式

$$\int_0^1 \beta(c_1(t))\left(c_1'(t)\right) dt \quad \int_0^1 \beta(c_0(t))\left(c_0'(t)\right)) dt = \iint_{(s,t)\in[0,1]^2} d\beta(c_s(t))\left(\partial_s c_s(t), \partial_t c_s(t)\right) ds dt$$

で $d\beta = 0$ を用いると

$$F_k(x_1) \quad F_k(x_0) = f_{k+1}(x_1) \quad f_{k+1}(x_0).$$

従って $f_{k+1}(x_0) = F_k(x_0)$ ならば $f_{k+1}(x_1) = F_k(x_1)$ で (iv) が示される．

以上の標準的な議論は無限次元であっても Frechet の意味で滑らかなカテゴリーで考えれば実行できる．また，特に U_i が凸である必要は無い．ここでは，Malliavin 解析のカテゴリーでの消滅定理を考える．具体的には G を単連結なコンパクトリー群とする．このとき $\pi_2(G) = 0$. したがって $L_e(G) = C([0,1] \to G \mid \gamma(0) = \gamma(1) = e)$ は連結かつ単連結である．$L_e(G)$ 上の条件付きブラウン運動の測度 $_e$ に基づいた Malliavin 解析の意味で定義されたソボレフ空間の微分形式の空間上の外微分 d を考える．$L_e(G)$ 上で

[1] $H^1(D, \mathbb{R}) = 0$ で以下の議論は可能である．

Theorem 1 (1) 1-*form* 　が d 　$= 0$ を満たすとき，適当な f が存在して $df =$ 　となる．
(2) *1-form* に作用する *Hodge-Kodaira* 型作用素 $\square = dd^* + d^*d$ について $\mathrm{Ker}\square = 0$．ただし d^* は $L^2(\ _e)$ での随伴作用素を表す．

示す．この種の定理としては楠岡による一般的な結果がある [2]．それについても講演で説明する
　我々の証明は楠岡のものとは異なる．Theorem 1 (1) の証明のあらすじは以下の通りである．(2) は (1) を用いて示される．

(I) G 上の確率微分方程式を用いて Wiener 空間 W_0^d ($d = \dim G$) 上の rough path の意味での開集合 D 上の問題に変える．すなわち D 上に Malliavin 解析の意味で滑らかなかつ closed な 1-form β が与えられたとき完全であることを前記の (i)〜(iv) の論法で示す.

(II) U_i にあたる集合として rough path 解析の意味での ”開球 ”を取る. この U_i 上で 1-form に対するポアンカレ型の消滅定理を示す.

(III) 有限次元の単連結性にあたる性質 ”H-単連結性 ”を示す．これは $L_e(G)$ の単連結性から従う．

(IV) Malliavin 解析での Stokes の定理を用意する．

　$d = 2$ のときは 0 を中心とする ”開球 ”は

$$U_r = \{w = (w^1, w^2) \in W_0^2 \mid \max_{i=1,2} \|w^i\|_{m,\theta'/2} < r, \|C(w^1, w^2)\|_{m,\theta} < r\}$$

である．$2/3 < \theta < \theta' < 1$, m は $m(1\quad\theta') > 2$ となる偶数とする．また $C(w^1, w^2)_{s,t} = \int_s^t (w^1(u)\quad w^1(s))dw^2(u)$．$\|\ \|_{m,\theta}$ はノルム空間 V 値連続写像 $\phi : \Delta \to V$,（$\Delta = \{(s,t) \mid 0\quad s\quad t\quad 1\}$）に対し

$$\|\phi\|_{m,\theta} \quad = \quad \int_0^1 \int_0^t \frac{|\phi(s,t)|^m}{(t\quad s)^{2+m\theta}} ds dt \Big\}^{1/m}.$$

また w^i 自身は $w^i_{s,t} = w^i_t\quad w^i_s$ と同一視している．確率微分方程式の解がブラウン運動とその 2 次の逐次積分二つの汎関数としては連続になるため, 上記の集合で D が被覆できることがわかる．U_r は凸な集合では無いことを注意しておく．

References

[1] S. Aida, Vanishing of one dimensional L^2-cohomologies of loop groups, preprint, 2009.

[2] S. Kusuoka, de Rham cohomology of Wiener-Riemannian manifolds, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. I,II (Kyoto, 1990), 1075–1082, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

[3] S. Kusuoka, Analysis on Wiener spaces, I, Nonlinear Maps, J. Funct. Anal. **98**,(1991), 122–168.

[4] S. Kusuoka, Analysis on Wiener Spaces, II, Di erential Forms, J. Funct. Anal. **103** (1992), 229–274.

ON BEHAVIORS OF MEASURE-VALUED MARKOV PROCESSES WITH IRREGULAR PARAMETERS

ISAMU DÔKU

Department of Mathematics, Saitama University

Let D be a domain of $\mathbb{R}^d$. Let $C_c^+(D)$ be the space of non-negative continuous functions on D with compact support. We denote by $C^{k,\eta}(D)$ the usual Hölder space with index $\eta \in (0,1]$, which includes derivatives of order k, and in particular we simply wrire $C^\eta(D)$ instead of $C^{0,\eta}(D)$. Let L be an elliptic operator on the domain D of the form

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\nabla \cdot a\nabla + b \cdot \nabla \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned} \tag{1}$$

where the matrix $a(x) = (a_{ij}(x))$ is symmetric and positive definite for $x \in D$. Suppose that $a_{ij}(x) \in C^{1,\eta}(D)$ and $b_i(x) \in C^{1,\eta}(D)$ for $i,j = 1,2,\ldots,d$. We often write

$$\langle \nu, f\rangle = \int_D f(x)\nu(\mathrm{d}x) \tag{2}$$

for the integral of measurable function f with respect to the measure ν on D.

We set $\mathcal{L}_0 = L + \beta$ on the domain D. Let λ_c be the generalized principal eigenvalue for $\mathcal{L}_0$.

Theorem 1. *Let $\lambda_c > 0$. Suppose that the operator $\mathcal{L} = L + \beta - \lambda_c$ is subcritical. Let $X = (X_t, \mathbb{P}_\mu)$ be the (L, β, α, D) superprocess. Then we* *have*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_c t}\mathbb{E}_\mu[\langle X_t, g\rangle] = 0 \tag{3}$$

for any g in the space $C_c^+(D)$.

Next we consider the behaviors of a class of measure-valued Markov processes with irregular parameters. Suppose that $d = 1$ for simplicity.

Let $X = (X_t, \mathbb{P}_\mu)$ be the (L, δ_0, α) superprocess. We denote by λ the generalized principal eigenvalue for the operator $\mathcal{L} = L + \delta_0$, and we define $\mathcal{C} = \{u > 0;\ (\mathcal{L} - \lambda)u = 0\}$. Suppose that $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Theorem 2. *Suppose that $\mathcal{L} - \lambda$ is critical. For $\varphi \in \mathcal{C}$, we have*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t}\mathbb{E}_{\delta_x}\langle X_t, g\rangle = K \cdot \varphi(x), \tag{4}$$

for any $g \in C_c(\mathbb{R})$ with $K = (\varphi, g)_{L^2}/\|\varphi\|_{L^2}^2$.

Hypoellipticity and ergodicity of the Wonham filter as a diffusion process

Takashi Tamura (Osaka University/JST PRESTO)
Yûsuke Watanabe (Osaka University)

1 Introduction

The ergodicity problem of the Wonham filter as a diffusion process is discussed. We show that an ergodic theorem of degenerate Markov diffusions is applicable to the problem even when the Wonham equation is degenerate. Under a certain condition, the Wonham equation satisfies Hörmander's condition and the Wonham filter has a continuous transition density. From these results, we obtain that the transition kernel of the Wonham filter as a diffusion process converges to a unique invariant probability measure as $t \to \infty$ under the condition.

2 Settings

Let us introduce a pair of continuous time stochastic processes (X_t, Y_t), where X_t and Y_t represent the **signal** and the **noisy observation** of X_t respectively. X is a finite-state continuous-time Markov chain with finite state space $\mathcal{E}^d = \{e_1, \cdots, e_d\}$ and a Q-matrix $\Lambda := (\lambda_{ij})_{1\le i,j\le d}$ as a generator. Y is a **one-dimensional** process defined by

$$\text{observation} \qquad Y_t := \int_0^t g(X_s)ds + \sigma B_t, \tag{1}$$

where $g : \mathcal{E}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. The observation noise B_t is a **one-dimensional** Brownian motion independent of X_t. Set $g_i := g(e_i)$. Let G be a diagonal matrix with $G_{ii} := g_i$. Without loss of generality, we can assume that $g_i \le g_j$ if $i \le j$, and that $0 \le g_i$ for each $1 \le i \le d$. We are interested in the asymptotic behaviour of the conditional distribution

$$p_t := (p_t^1, \cdots, p_t^d), \quad p_t^i := P(X_t = e_i | \mathcal{Y}_t), \tag{2}$$

where $\mathcal{Y}_t := \sigma(Y_s : 0 \le s \le t)$. The dynamics of p_t is described by the following stochastic differential equation (SDE),

$$\begin{aligned} dp_t^i &= (\Lambda\ p_t)^i dt + p_t^i\{g_i - p_t(g)\}\sigma^{-2}\{dY_t - p_t(g)dt\}, \\ p_0^i &= \beta^i, \quad i = 1, \cdots, d, \end{aligned} \tag{3}$$

where $p_t(g) = \sum_{j=1}^d g(e_j)p_t^j$. This SDE is called *the Wonham equation*. It is well-known that the process

$$W_t := \sigma^{-1}(Y_t - \int_0^t p_s(g)ds)$$

is a **one-dimensional** Brownian motion adapted to $\mathcal{Y}_t$. Therefore we can rewrite (3) as

$$\begin{aligned} dp_t^i &= (\Lambda \ p_t)^i dt + p_t^i\{g_i - p_t(g)\}\sigma^{-1}dW_t \\ &=: U_0^i(p_t)dt + V^i(p_t)dW_t \\ &= U^i(p_t)dt + V^i(p_t) \circ dW_t, \end{aligned} \tag{4}$$

where $U^i(p) := U_0^i(p) - 1/2\sum_{j=1}^d V^j\partial_j V^i(p)$. We define

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_d &:= \{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 \le x_i \le 1, \textstyle\sum_{i=1}^d x_i = 1\} \text{ (simplex)}, \\ \mathcal{I}_d &:= \{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 \le x_i \le 1, \textstyle\sum_{i=1}^d x_i \le 1\} \text{ (interior)}. \end{aligned}$$

Notice that $\sum_{i=1}^d p_t^i \equiv 1$ holds and p_t is a diffusion on $\mathcal{S}_d$. Hence we study the $d-1$-dimensional diffusion

$$q_t := (p_t^1, \dots, p_t^{d-1})$$

in $\mathcal{I}_{d-1}$, and will show its ergodicity and so on. If q_t is ergodic in $\mathcal{I}_{d-1}$, we say that *the Wonham filter is ergodic*. The filter q_t satisfies the following SDE;

$$dq_t^i = A^i(q_t)dt + B^i(q_t) \circ dW_t \tag{5}$$

for $1 \le i \le d-1$, where

$$\begin{aligned} A^i(q_1, \dots, q_{d-1}) &:= U^i(q_1, \dots, q_{d-1}, 1 - \textstyle\sum_{i=1}^{d-1} q_i), \\ B^i(q_1, \dots, q_{d-1}) &:= V^i(q_1, \dots, q_{d-1}, 1 - \textstyle\sum_{i=1}^{d-1} q_i). \end{aligned}$$

Let $Q_t(q, \cdot)$ be the transition kernel of q_t. We show that the vector fields, A^i, B^i, satisfy Hörmander's condition under a certain condition.

3 Main Result

Here we state our main result.

Assumption 1. *Q-matrix Λ is irreducible. $g_i - g_j \neq g_l - g_k$ holds if $(i,j) \neq (l,k)$.*

Assumption 2. *Q-matrix Λ is irreducible, $\lambda_{1d} \neq 0$, and $\lambda_{d1} \neq 0$. $g_i < g_j$ holds if $i < j$.*

Theorem 3 (Main Theorem)**.** *Assume Assumption 1 or Assumption 2. Then q_t has a continuous transition density on $\mathcal{I}_{d-1}$ and a unique invariant probability measure ν on $\mathcal{I}_{d-1}$. Moreover it is exponentially ergodic on $\mathcal{I}_{d-1}$,*

$$\|Q_t(q, \cdot) - \nu\| \le R_1 e^{-\alpha t} \quad \text{for all } q \in \mathcal{I}_{d-1},$$

i.e., the Wonham filter is exponentially ergodic.

Here $\|\cdot\|$ denotes the total variation of measures on $\mathcal{I}_{d-1}$.

Spectra of Non-symmetric Operators

Yusuke IKENO
Kyoto University

Ichiro SHIGEKAWA
Kyoto University

1 Introduction

In this talk, we discuss spectra of non-symmetric operators. We computed the spectra of

1. generator of Brownian motion with drift,
2. Laplacian with rotation, and
3. Ornstein Uhlenbeck operator with rotation.

2 Spectrum of a non-normal operator

Let $A := \quad \frac{d^2}{dx^2} + c\frac{d}{dx}$ acting on $L^2(\mathbf{R}, \ {}_\theta)$, where

$$ {}_\theta(dx) = \{(1 \quad \theta) + \theta e^{\quad cx}\}dx, \tag{1}$$

and $c \quad 0$. These $\{\ {}_\theta\}_{0 \ \theta \ 1}$ are invariant measures of A.

A is a self-adjoint operator for $\theta = 1$, and normal one for $\theta = 0$. In these two cases, we can compute spectra of A as follows by the Fourier transform.

Theorem 1 *Let* ${}_0$, ${}_1$ *be spectra of* A *for* $\theta = 0, 1$, *respectively. Then*

$$ {}_0 = \left\{ z = x + iy \in \mathbf{C} \ ; \ c^2x = y^2 \right\}, \tag{2}$$

and

$$ {}_1 = \left\{ \frac{c^2}{4} + t \ ; \ 0 \quad t \right\}. \tag{3}$$

*November 5-7, 2009, "Stochastic Analysis and Related Topics " in Tohoku University

Since A is not a normal operator for $0 < \theta < 1$, we need another way to compute its spectrum. The relation

$$L^2(\mathbf{R}, \quad _\theta) = L^2(\mathbf{R}, \quad _0) \cap L^2(\mathbf{R}, \quad _1) \tag{4}$$

gives an idea to compute the spectrum. It is computed as follows.

Theorem 2 *For $0 < \theta < 1$, the spectrum of A is* $\ _0 \cup \ _1$.

3 Perturbation by rotation

3.1 Laplacian on $\mathbf{R}^2$

Let L be

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial}{\partial y^2} + \left(x\frac{\partial}{\partial y} \quad y\frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{on } L^2(\mathbf{R}^2, dxdy). \tag{5}$$

The spectrum of $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ is $\mathbf{R}_{\geq 0}$. There are many eigenfunctions corresponding to a spectrum.

Using polar coordinate, we get;

Theorem 3 *The spectrum of L is*

$$\{ \quad + in \ ; \qquad 0, \ n \in \mathbf{Z} \} \tag{6}$$

and the corresponding eigenfunction to $\quad + in$ is $J_{|n|}(\sqrt{\quad} r)e^{in\theta}$, where J_m is the Bessel functions of rst kind of order m. Here (r, θ) is the usual polar coordinate.

3.2 Ornstein Uhlenbeck operator on $\mathbf{R}^2$

Let $L \quad$ be

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial}{\partial y^2} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \quad \left(x\frac{\partial}{\partial y} \quad y\frac{\partial}{\partial x} \right) \tag{7}$$

acting on $L^2(\mathbf{R}^2, e^{\quad \frac{x^2+y^2}{2}} dxdy)$.

The spectrum of Ornstein-Uhlenbeck operator L_0 is $\{0, 1, 2, \ldots\}$ and corresponding eigenfunctions can be represented by Hermite polynomials.

For $\quad \neq 0$, the spectrum is clearly determined by complex Hermite polynomials

$$H_{p,q}(z, \bar{z}) := (\quad 1)^{p+q} e^{\frac{z\bar{z}}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^q e^{\quad \frac{z\bar{z}}{2}}. \tag{8}$$

Here, we regard $\mathbf{R}^2$ as $\mathbf{C}$. Then we have;

Theorem 4 *The spectrum of* L *is*

$$\{(p+q)+(p \quad q) \quad i\}_{p,q=0}^{\infty} \tag{9}$$

and corresponding eigenfunctions are $H_{p,q}$ *respectively.*

Let $V_n := \{L_0 f = nf\}$. Then by formulae of complex Hermite polynomials,

$$V_n = \bigoplus_{p+q=n} \mathbf{C} H_{p,q}.$$

This decomposition corresponds to a rotation group. $H_{n,n}$ is rotation invariant. Under the polar coordinate, $H_{n,n}$ satisfy a di erential equation.

Theorem 5 *Complex Hermite polynomials* $H_{n,n}$ *are expressed as following;*

$$H_{n,n}(z,\bar{z}) = cL_n\left(\frac{|z|^2}{2}\right), \tag{10}$$

where $L_n = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e \quad ^x x^n)$ *are Laguerre polynomials and* c *is a constant.*

ブラウン処罰を統一するシグマ有限測度について

神戸大理　矢野 孝次[a]

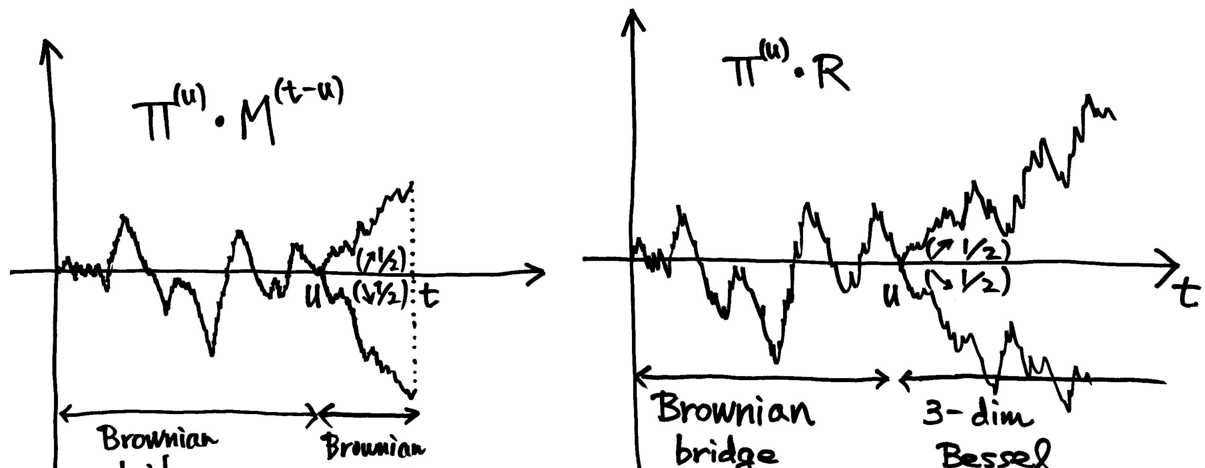
連続関数空間 $\Omega = C([0,\infty) \to \mathbb{R})$ 上の測度で次で与えられるものを考える:

$$\mathscr{W} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u}} \Pi^{(u)} \bullet R. \tag{1}$$

但し，$\Pi^{(u)}$ は原点から原点への長さ u のブラウン橋，R は 3 次元ベッセル過程の対称化，$\Pi^{(u)} \bullet R$ はそれらの道を独立に繋いでできる道の分布である．この測度 $\mathscr{W}$ は**ブラウン処罰問題** (see, e.g., [3]) に統一的な視点を与えるものとして Najnudel–Roynette–Yor らによって導入された ([2])．測度 $\mathscr{W}$ は Wiener 測度の長時間極限から得られるが，そのからくりはある時刻までで最後に原点を出た時刻についてのブラウン運動の経路分解公式である:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi t}{2}} W &\overset{\text{on } \mathcal{F}_t}{=} \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u}} \sqrt{\frac{t}{t-u}} \left(\Pi^{(u)} \bullet M^{(t-u)}\right) \\ &\xrightarrow[t\to\infty]{\text{roughly}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u}} \left(\Pi^{(u)} \bullet R\right) = \mathscr{W}.\end{aligned}$$

ここで，$M^{(s)}$ は対称化ブラウン彷徨過程 (meander) の分布である．確率測度 $\Pi^{(u)} \bullet M^{(t-u)}$ および $\Pi^{(u)} \bullet R$ は下図のような確率過程の分布である:



X を座標過程とし，$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \le t)$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_s : s \ge 0)$ とおく．測度 $\mathscr{W}$ は $\mathcal{F}_\infty$ 上では $\mathscr{W}$ はシグマ有限であるが，Wiener 測度と特異である．一方で，$\mathscr{W}$ に可積分な重みをかけて正規化した確率測度は各 $\mathcal{F}_t$ 上で Wiener 測度と絶対連続である．

ここでの目的は，$\mathscr{W}$ に対するカメロン・マルティン公式，すなわち平行移動に関する準不変性を示すことである．主定理は以下の通りである．

[a] E-mail: `kyano@math.kobe-u.ac.jp`　URL: `http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kyano/`

定理 1 ([4]). $h_t = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$, $f \in L^2 \cap L^1$ と仮定する．このとき，任意の非負 $\mathcal{F}_\infty$-可測関数 F に対し，

$$\mathscr{W}[F(X+h)] = \mathscr{W}[F(X)\mathcal{E}(f;X)] \tag{2}$$

が成り立つ．但し，$\mathcal{E}(f;X)$ は次で与えられる:

$$\mathcal{E}(f;X) = \exp\left(\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)^2\mathrm{d}s\right). \tag{3}$$

上の定理において現れる **Wiener 積分** $\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}X_s$ は，$f \in L^2(\mathrm{d}s) \cap L^1(\frac{\mathrm{d}s}{1+\sqrt{s}})$ のとき，階段関数近似によって構成される ([5]).

定理 1 の証明は次の手順で示される．

(i) $h_{t\wedge T} = \int_0^t f(s)1_{[0,T]}(s)\mathrm{d}s$ の場合．このときは $\mathscr{W}$ **のマルコフ性** ([2]):

$$\mathscr{W}\left[Z_t(X)F(\theta_t X)\right] = W\left[Z_t(X)\mathscr{W}_{X_t}[F(\cdot)]\right] \tag{4}$$

を用いることで Wiener 測度の場合に帰着される．

(ii) 一般の場合は，$T \to \infty$ とする．このとき指数汎関数 $\mathcal{E}(f;X)$ を含む期待値の評価が必要となるが，**Wiener 積分がガウスでない**ため工夫が必要である．次の定理が重要な役割を果たす.

定理 2 (舟木–針谷–Yor [1]). 任意の $f \in L^2$ と任意の非負凸関数 ψ に対し，

$$R\left[\psi\left(\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}\widehat{X}_s\right)\right] \le W\left[\psi\left(\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}X_s\right)\right] \tag{5}$$

が成り立つ．但し，W は Wiener 測度であり，$\widehat{X}_t = X_t - R^+[X_t]$ は**中心化ベッセル過程**と呼ばれる．

参考文献

[1] T. Funaki, Y. Hariya, and M. Yor. Wiener integrals for centered Bessel and related processes. II. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 1:225–240 (electronic), 2006.

[2] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. *A global view of Brownian penalisations*, volume 19 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[3] B. Roynette and M. Yor. *Penalising Brownian paths*, volume 1969 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 2009.

[4] K. Yano. Cameron–Martin formula for the σ-finite measure unifying Brownian penalisations. *preprint, arXiv:0909.5132*, 2009.

[5] K. Yano. Wiener integral for the coordinate process under the σ-finite measure unifying brownian penalisations. *preprint, arXiv:0909.5130*, 2009.

An upper estimate of the martingale dimension for Sierpinski carpets

日野 正訓 (Masanori HINO) （京都大学）

確率過程に含まれる「ノイズ」の分量を測る 1 つの指標として，マルチンゲール次元（フィルトレーションの重複度ともいう）という概念がある．問題設定に応じて微妙に定義が異なるが，ここでは強局所正則対称 Dirichlet 形式に付随した対称拡散過程に対する定義を以下のように与える．

K を局所コンパクト可分距離空間, μ を K 上の σ-有限 Borel 測度, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(K,\mu)$ 上の強局所正則対称 Dirichlet 形式とし，$\{X_t\}$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する K 上の拡散過程とする．エネルギー有限のマルチンゲール加法汎関数全体を $\mathring{\mathcal{M}}$ で表わす．$M\in\mathring{\mathcal{M}}$ の 2 次変分を $\langle M\rangle$，$\langle M\rangle$ に対応する Revuz 測度を $\mu_{\langle M\rangle}$ とするとき，関数 $f\in L^2(X,\mu_{\langle M\rangle})$ に対して確率積分 $f\bullet M\in\mathring{\mathcal{M}}$ が定まる．$f\in C_c(K)$ ならば $(f\bullet M)_t=\int_0^t f(X_s)\,dM_s$ と伊藤積分で表現できる．

定義 1　$\{X_t\}$（または $(\mathcal{E},\mathcal{F})$）の（加法汎関数に関する）マルチンゲール次元とは，次の性質を満たす最小の $p\in\mathbb{Z}_+\cup\{+\infty\}$ のことである: ある $\{M^{(i)}\}_{i=1}^p\subset\mathring{\mathcal{M}}$ が存在して，任意の $M\in\mathring{\mathcal{M}}$ は $\{M^{(i)}\}$ に関する次の形の確率積分による表現を持つ．

$$M_t=\sum_{i=1}^p(\varphi^{(i)}\bullet M^{(i)})_t,\quad t\ge 0.$$

$\mathcal{E}(f,f)\equiv 0$ という自明な場合を除き，マルチンゲール次元は 1 以上である．$\mathbb{R}^d$ 上の Brown 運動のマルチンゲール次元は d である．より一般に，Riemann 構造を持つ底空間に付随する自然な Dirichlet 形式に関するマルチンゲール次元は（緩やかな条件下で）底空間の次元に等しい．また，2 つの同値な[*1]強局所正則 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}^{(1)},\mathcal{F})$ と $(\mathcal{E}^{(2)},\mathcal{F})$ に対応するマルチンゲール次元は等しい ([4, Proposition 2.14])．エネルギー測度を用いたマルチンゲール次元の解析的な定義方法も知られている ([4, Theorem 3.4])．

これらの事実を踏まえ，底空間 K がフラクタルのような微分構造を持たない集合のときどのような状況になっているか調べることは，解析手段の開発という意味も込めてそれなりに興味のある問題である．最初の結果は楠岡成雄 [5] による（任意次元の）Sierpinski gasket 上の Brown 運動についてのもので，それを拡張したのが次の定理である．

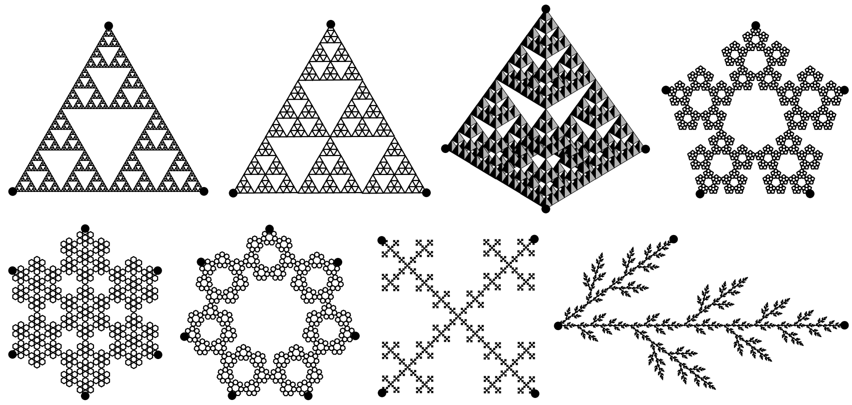
定理 2 **([3])**　p.c.f. 自己相似集合 K（図 1 参照）がある技術的な条件 $(*)$ をみたすとする．K が正則な調和構造を持つとき，それに付随して定まる自己相似 Dirichlet 形式のマルチンゲール次元は 1．

条件 $(*)$ の記述は省略するが，nested fractal は常にこの条件をみたす．図 1 の右下の Hata's tree-like set については $(*)$ が成り立たず，定理 2 は適用できないが，直接計算によりやはり同じ結論が成立する ([4])．

文献 [3] における定理 2 の証明には，集合 K が有限分岐的であり，Dirichlet 形式が有限個の行列 $\{A_i\}$ の積の極限により表現されること，および Perron–Frobenius の定理が各 A_i に適用できること（ここで条件 $(*)$ を用いる）が本質的に効いている．

では無限分岐的なフラクタルの場合はどうかというのが本講演の主題である．性質が詳しく調べられている（ほとんど唯一の例である）generalized Sierpinski carpet（図 2 参照）について考える．Sierpinski carpet K とその上の Hausdorff 測度 μ に関して，K の対称性や non-diagonality 等の適切な条件下で，$L^2(K,\mu)$ 上の

[*1] ある正定数 c_1,c_2 が存在して，任意の $f\in\mathcal{F}$ に対して $c_1\mathcal{E}^{(1)}(f,f)\le\mathcal{E}^{(2)}(f,f)\le c_2\mathcal{E}^{(1)}(f,f)$ となること．



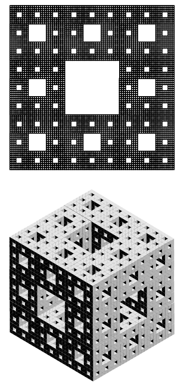


図 1　p.c.f. 自己相似集合の例．黒点は「境界点」．　　　　図 2　Sierpinski carpets

非自明な自己相似 Dirichlet 形式がただ 1 つ存在し，付随する熱核 $p_t(x,y)$ は次の評価をみたす ([1, 2]):

$$p_t(x,y) \approx c_1 t^{-d_s/2} \exp\left(-c_2 \left(\frac{|x-y|^{d_w}}{t} \right)^{1/(d_w-1)} \right), \quad 0 < t \le 1,\ x,y \in K.$$

d_s をスペクトル次元，d_w をウォーク次元と呼ぶ．また，d_f を K の Hausdorff 次元とするとき，関係式

$$d_w d_s = 2d_f,\ d_w \ge 2,\ d_s \le d_f,\ d_s > \frac{2d_f}{1+d_f} > 1$$

が成り立つ．対応する拡散過程が点再帰的であるための必要十分条件は $d_s < 2$ である．このような状況の下，主定理は次のように述べられる．

定理 3　マルチンゲール次元を d_m とするとき，$d_m \le d_s$．特に拡散過程が点再帰的であれば，$d_m = 1$．

証明の方針は定理 2 とはかなり異なる．簡単のため $d_s > 2$, $d_m < \infty$ として概略を述べる．まず K から $\mathbb{R}^{d_m}$ への良い性質を持つ“調和写像”が存在することを示し，次にその写像による $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の像が $\mathbb{R}^{d_m}$ 上の標準 Dirichlet 形式とある程度比較可能であることを示す．もし $d_m > d_s$ ならば，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ がみたすべき Sobolev の不等式に反するような関数列が，$\mathbb{R}^{d_m}$ 上の Green 関数（の調和写像による引き戻し）を用いて構成でき，矛盾が生じる．この議論は p.c.f. 自己相似集合に対しても適用でき，定理 2 において実は条件 $(*)$ を課さなくても結論が成り立つことも示される．

参考文献

[1] M. T. Barlow and R. F. Bass, Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets, *Canad. J. Math.* **51** (1999), 673–744.

[2] M. T. Barlow, R. F. Bass, T. Kumagai, and A. Teplyaev, Uniqueness of Brownian motion on Sierpinski carpets, to appear in *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*.

[3] M. Hino, Martingale dimensions for fractals, *Ann. Probab.* **36** (2008), 971–991.

[4] M. Hino, Energy measures and indices of Dirichlet forms, with applications to derivatives on some fractals, to appear in *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*.

[5] S. Kusuoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **25** (1989), 659–680.

Infinitely dimensional stochastic differential equations for interacting Brownian motions

Hirofumi Osada (Kyushu University)

Let $S=\mathbb{R}^d$ and let S be the configuration space over S. Let $\sigma : S\times\mathsf{S}\to\mathbb{R}^{d^2}$ and $\mathbf{b} : S\times\mathsf{S}\to\mathbb{R}^d\cup\{\mathbf{\Delta}\}$ be measurable functions. Here $\mathbf{\Delta}$ means an extra point. Let $\mathbf{a}=\sigma\sigma^t$. We assume there exists a positive constant c_1 independent of (x,x) for each $(x,\mathsf{x})\in S\times\mathsf{S}$ such that

$$0\le\sum_{m,n=1}^{d}\mathbf{a}_{mn}(x,\mathsf{x})\xi_m\xi_n\le c_1|\xi|^2 \quad \text{for all } \xi=(\xi_m)\in\mathbb{R}^d. \tag{1}$$

For $\mathbf{X}=(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ we set $(X^i,\mathsf{X}^i\ )=\{(X_t^i,\mathsf{X}_t^i\ )\}\in C([0,\infty);S\times\mathsf{S})$ by

$$(X_t^i,\mathsf{X}_t^i\ )=(X_t^i,\sum_{j\ne i,j\in\mathbb{N}}\delta_{X_t^j}).$$

We study the SDEs of the form:

$$dX_t^i=\sigma(X_t^i,\mathsf{X}_t^i\ )dB_t^i+\mathbf{b}(X_t^i,\mathsf{X}_t^i\ )dt \quad (i\in\mathbb{N}). \tag{2}$$

Let $S^\infty=S^{\mathbb{N}}$. Let $\check{\sigma}$ and $\check{\mathbf{b}}$ be the functions of $(x,(x_j)_{j\in\mathbb{N}})$ defined on $S\times S^\infty$ being symmetric in $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ for each x and satisfying

$$\check{\sigma}(x,(x_j)_{j\in\mathbb{N}})=\sigma(x,\sum_{j\in\mathbb{N}}\delta_{x_j}),\quad \check{\mathbf{b}}(x,(x_j)_{j\in\mathbb{N}})=\mathbf{b}(x,\sum_{j\in\mathbb{N}}\delta_{x_j}). \tag{3}$$

Then we can rewrite (2) as (4)

$$dX_t^i=\check{\sigma}(X_t^i,(X_t^j)_{j\ne i})dB_t^i+\check{\mathbf{b}}(X_t^i,(X_t^j)_{j\ne i})dt \quad (i\in\mathbb{N}). \tag{4}$$

Let $\check{\mathbf{a}}=\check{\sigma}\check{\sigma}^t$. Write $\check{\mathbf{a}}=[\check{\mathbf{a}}_{kl}]_{1\le k,l\le d}$ and $\check{\mathbf{b}}=(\check{\mathbf{b}}_k)_{1\le k\le d}$. Then intuitively the generator is

$$\mathbf{L}:=\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{k,l=1}^{d}\check{\mathbf{a}}_{kl}(s_i,(s_j)_{j\in\mathbb{I},j\ne i})\frac{\partial^2}{\partial s_{ik}\partial s_{il}}+\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{d}\check{\mathbf{b}}_k(s_i,(s_j)_{j\in\mathbb{I},j\ne i})\frac{\partial}{\partial s_{ik}}. \tag{5}$$

Here $s_i=(s_{i1},\dots,s_{id})\in\mathbb{R}^d$.

Our strategy to solve SDE (2) (and (4)) is to use a geometric property behind the SDE (2). We first consider invariant probability measure μ of the unlabeled dynamics associated with (2). Namely, we consider a probability measure μ whose log derivatve $\mathbf{d}^\mu$ satisfies $\mathbf{b}(x,\mathsf{y})=\{\nabla_x\mathbf{a}(x,\mathsf{y})+\mathbf{a}(x,\mathsf{y})\mathbf{d}^\mu(x,\mathsf{y})\}/2$. Here $\mathbf{d}^\mu$ is the log derivative of the measure μ^1 given by (6), and the definition of $\mathbf{d}^\mu$ is given by (12).

Note that for a given pair $(\mathbf{a},\mu)$, $\mathbf{b}$ is determined uniquely. We construct the unlabeled diffusion associated with $(\mathbf{a},\mu)$ by using the Dirichlet space given by $(\mathbf{a},\mu)$ and prove the labeled process consisting of each component of the unlabeled diffusion satisfies (2) and (4).

If there were a Dirichlet space associated with the the (fully) labeled diffusion $\mathbf{X}$, we could use Ito formula for each component X^i and X^iX^j, and prove $\mathbf{X}$ satisfies (5) since all coordinate functions x^i,x^ix^j $(i,j\in\mathbb{N})$ would be in the domain of the Dirichlet space locally. We emphasize that no Dirichlet spaces associated with the (fully) labeled diffusion $\mathbf{X}$ exist. So we instead introduce an infinite sequence of Dirichlet spaces associated with the k-labeld process $\{((X_t^1,\dots,X_t^k,\sum_{j>k}\delta_{X_t^j}))\}$ for all $k=0,1,\dots$. This sequence of the k-labeld processes have some the consistency and satisfies the SDEs (2) and (4).

Let μ be a probability measure on $(\mathsf{S}, \mathcal{B}(\mathsf{S}))$. Let ρ^k be the k-correlation function of μ with respect to the Lebesgue measure. Let μ^k be the measure on $S^k \times \mathsf{S}$ defined by

$$\mu^k(A \times B) = \int_A \mu_{\mathbf{x}}(B)\rho^k(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{6}$$

Here $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in S^k$ and $d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_k$. Moreover, $\mu_{\mathbf{x}}$ is the Palm measure conditioned at $\mathbf{x}$:

$$\mu_{\mathbf{x}} = \mu(\cdot - \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i} |\ \mathsf{s}(x_i) \geq 1 \text{ for } i = 1, \dots, k). \tag{7}$$

We now introduce Dirichlet forms describing the k-labeled dynamics. For a subset $A \subset S$ we define the map $\ _A : \mathsf{S} \to \mathsf{S}$ by $\ _A(\mathsf{s}) = \mathsf{s}(A \cap \cdot)$. We say a function $f : \mathsf{S} \to \mathbb{R}$ is local if f is $\sigma[\ _A]$-measurable for some compact set $A \subset S$. We say f is smooth if $\tilde{f}$ is smooth, where $\tilde{f}((s_i))$ is the permutation invariant function in (s_i) such that $f(\mathsf{s}) = \tilde{f}((s_i))$ for $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$.

Let $\mathcal{D}_\circ$ be the set of all local, smooth functions on S with compact support. For $f, g \in \mathcal{D}_\circ$ we set $\mathbb{D}^{\mathbf{a}}[f, g] : \mathsf{S} \to \mathbb{R}$ by

$$\mathbb{D}^{\mathbf{a}}[f, g](\mathsf{s}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{m,n=1}^{d} \mathbf{a}_{mn}(s_i, \mathsf{s}_i) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s_{im}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial s_{in}}. \tag{8}$$

Here $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$, $\mathsf{s}_i = \sum_{j \neq i} \delta_{s_j}$, and $s_i = (s_{i1}, \dots, s_{id}) \in S$.

For $k \in \mathbb{N}$ let $\mathcal{D}_\circ^k = C_0^\infty(S^k) \otimes \mathcal{D}_\circ$. For $f, g \in \mathcal{D}_\circ^k$ let $\nabla^{\mathbf{a},k}[f, g]$ be such that

$$\nabla^{\mathbf{a},k}[f, g](\mathbf{x}, \mathsf{s}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{m,n=1}^{d} \mathbf{a}_{mn} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathsf{s})}{\partial x_{im}} \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathsf{s})}{\partial x_{in}}. \tag{9}$$

where $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in S^k$ and $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{id}) \in S$. We set $\mathbb{D}^{\mathbf{a},k}$ by

$$\mathbb{D}^{\mathbf{a},k}[f, g](\mathbf{x}, \mathsf{s}) = \nabla^{\mathbf{a},k}[f, g](\mathbf{x}, \mathsf{s}) + \mathbb{D}^{\mathbf{a}}[f(\mathbf{x}, \cdot), g(\mathbf{x}, \cdot)](\mathsf{s}). \tag{10}$$

Let $L^2(\mu^k) = L^2(S^k \times \mathsf{S}, \mu^k)$. Let $(\mathcal{E}^{\mathbf{a},k}, \mathcal{D}_\circ^{\mathbf{a},k})$ be the bilinear form defined by

$$\mathcal{E}^{\mathbf{a},k}(f, g) = \int_{S^k \times \mathsf{S}} \mathbb{D}^{\mathbf{a},k}[f, g] d\mu^k, \quad \mathcal{D}_\circ^{\mathbf{a},k} = \{f \in \mathcal{D}_\circ^k \cap L^2(\mu^k);\ \mathcal{E}^{\mathbf{a},k}(f, f) < \infty\}. \tag{11}$$

We assume there exists a probability measure μ on S satisfying (A.1)–(A.5):

(A.1) ρ^k is locally bounded for each $k \in \mathbb{N}$.

(A.2) There exists $\mathbf{d}^\mu = (\mathbf{d}_m^\mu)_{m=1,\dots,d} \in \{L^1_{\mathrm{loc}}(\mu^1)\}^d$ such that

$$\int_{S \times \mathsf{S}} \mathbf{d}^\mu f d\mu^1 = -\int_{S \times \mathsf{S}} \nabla_x f d\mu^1 \quad \text{for all } f \in \mathcal{D}_\circ^1. \tag{12}$$

Here $\nabla_x f(x, \mathsf{s}) = (\frac{\partial f(x,\mathsf{s})}{\partial x_m})_{m=1,\dots,d}$, where $x = (x_1, \dots, x_d)$. Moreover, the column vector $\mathbf{d}^\mu$ satisfies

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}\{\nabla_x \mathbf{a}\}\mathbf{d}^\mu + \frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{d}^\mu, \quad \mathbf{b} \in L^2_{\mathsf{loc}}(\mu^1). \tag{13}$$

Here $\nabla_x \mathbf{a}$ is the matrix defined by $\nabla_x \mathbf{a} = [\frac{\partial \mathbf{a}_{mn}(x,\mathsf{s})}{\partial x_n}]$.

(A.3) $(\mathcal{E}^{\mathbf{a},k}, \mathcal{D}_\circ^{\mathbf{a},k})$ is closable on $L^2(\mu^k)$ for each $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

(A.4) $\mathrm{Cap}^\mu(\{\mathsf{S}_{\mathrm{s.i.}}\}^c) = 0$.

(A.5) There exists $T > 0$ such that for each $R > 0$

$$\liminf_{r \to \infty} \{\int_{|x| \leq r+R} \rho^1(x)dx\} \cdot \ell(\frac{r}{\sqrt{(r+R)T}}) = 0, \quad \text{where } \ell(t) = (2\ \ )^{-1/2} \int_t^\infty e^{-u^2/2} du. \tag{14}$$

Let $(\mathcal{E}^{\mathbf{a},k}, \mathcal{D}^{\mathbf{a},k})$ be the closure of $(\mathcal{E}^{\mathbf{a},k}, \mathcal{D}_{\circ}^{\mathbf{a},k})$ on $L^2(\mu^k)$. It is known that $(\mathcal{E}^{\mathbf{a},k}, \mathcal{D}^{\mathbf{a},k})$ is quasi-regular and the associated diffusion exists. Cap^{μ} in (A.4) is the capacity of the Dirichlet space $(\mathcal{E}^{a,0}, \mathcal{D}^{a,0}, L^2(\mu))$.

Theorem 1. *Assume* (A.1)–(A.5). *Then there exists a set* $\mathsf{S}_0 \in \mathcal{B}(\mathsf{S})$ *such that*

$$\mu(\mathsf{S}_0) = 1, \quad \mathsf{S}_0 \subset \mathsf{S}_{\mathrm{s.i.}}, \tag{15}$$

and that, for all $\mathbf{s} \in \kappa^{-1}(\mathsf{S}_0)$*, there exists a* $S^{\mathbb{N}}$*-valued continuous process* $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$*, and* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*-valued Brownian motion* $\mathbf{B} = (B^i)_{i\in\mathbb{N}}$ *satisfying*

$$dX_t^i = \sigma(X_t^i, \mathsf{X}_t^i\ )dB_t^i + \mathbf{b}(X_t^i, \mathsf{X}_t^i\ )dt \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{16}$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{s}. \tag{17}$$

Moreover, $\mathbf{X}$ *satisfies*

$$P(\kappa(\mathbf{X}_t) \in \mathsf{S}_0,\ 0 \le \forall t < \infty) = 1, \tag{18}$$

$$P(\sup_{0\le t\le u} |X_t^i| < \infty \textit{ for all } u \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}) = 1. \tag{19}$$

Let $\kappa : S^{\mathbb{N}} \to \mathsf{S}$ such that $\kappa((s_i)) = \sum_i \delta_{s_i}$. Let $\kappa_{\mathrm{path}} : C([0,\infty); S^{\mathbb{N}}) \to C([0,\infty); \mathsf{S})$ such that $\kappa_{\mathrm{path}}(\mathbf{X}) = \sum_i \delta_{X_t^i}$.

Theorem 2. (1) *Let* $\mathbf{S}_0$ *be the subset of* $S^{\mathbb{N}}$ *defined by* $\mathbf{S}_0 = \kappa^{-1}(\mathsf{S}_0)$*. Let* $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}$ *be the distribution of* $\mathbf{X}$ *given by Theorem 1. Then* $\{\mathbf{P}_{\mathbf{s}}\}_{\mathbf{s}\in\mathbf{S}_0}$ *is a diffusion with state space* $\mathbf{S}_0$*.*
(2) *Let* $\mathsf{s} = \kappa(\mathbf{s})$*. Let* P_{s} *be the distribution of* $\mathsf{X} := \kappa_{\mathrm{path}}(\mathbf{X})$*. Then* $\{\mathsf{P}_{\mathsf{s}}\}_{\mathsf{s}\in\mathsf{S}_0}$ *is a* μ*-reversible diffusion with state space* S_0*.*

Example 1. Let $\Psi(x, y)$ be a Ruelle's class potential that is smooth on $\{x \ne y\}$. Let μ_Ψ be the associated canonical Gibbs measures. Then (A.1)–(A.3) are satisfied. The sutablity of (A.4) and (A.5) is easily checked.

Example 2. Let Ψ be the 2D Coulomb potential $\Psi(x) = -2\log|x|$ $(x \in \mathbb{R}^2)$ with $\quad = 2$. Let $d = 2$. Then the associated SDE becomes

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j| < r} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \qquad (\mathbf{X}_0 = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}). \tag{20}$$

Theorem 3. *Let* μ *be the Ginibre random point field. Then there exists a set* $\mathbf{S} \subset (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ *such that* $\mu(\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{x_i}; \mathbf{x} = (x_i) \in \mathbf{S}\}) = 1$ *and that* (20) *has a solution for all initial points* $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{S}$*. Moreover, for all initial points* $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$*,*

$$P(\mathbf{X}_t \in \mathbf{S} \cap \mathbf{S}_{\mathrm{single}} \textit{ for all } t) = 1.$$

Here $\mathbf{S}_{\mathrm{single}} = \{\mathbf{s} = (s_i) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}};\ s_i \ne s_j \textit{ if } i \ne j\}$*. More precisely, there exist* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$*-valued process* $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ *and Brownian motion* $\mathbf{B} = (B^i)_{i\in\mathbb{N}}$ *such that the pair* $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ *satisfies the SDE* (20)*.*

We remark that the DLR equation for μ does not make sense. However, by (20) one can say μ is a measure with $2D$ Coulomb interaction potential Ψ. Indeed, μ is the reversible measure of the unlabeled diffusion $\mathbb{X}_t = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{X_t^i}$, where the associated labeled dynamics $\mathbf{X}_t = (X_t^i) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ is the solution of the infinitely dimensional SDE:

The Ginibre random point field μ is a probability measure on the configuration $\mathbb{S}$ over $\mathbb{R}^2$. It is known that μ is translation and rotation invariant. Moreover, μ is so called a determinantal random point field whose n-correlation function ρ^n is given by

$$\rho^n(x_1, \dots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{1 \le i,j \le n}, \tag{21}$$

where $K : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ is the kernel defined by

$$K(x,y) = \frac{1}{\pi} \exp(-\frac{|x|^2}{2} - \frac{|y|^2}{2}) \cdot e^{x\bar{y}}. \tag{22}$$

Here we identify $\mathbb{R}^2$ as $\mathbb{C}$ by the obvious correspondence: $\mathbb{R}^2 \ni x = (x_1, x_2) \mapsto x_1 + \sqrt{-1}x_2 \in \mathbb{C}$, and $\bar{y} = y_1 - \sqrt{-1}y_2$ means the complex conjugate under this identification.

The key point of Theorem 3 is to calculate the log derivative of the one moment measure μ^1 of the Ginibre random point field μ.

The solution satisfies the second SDE:

Theorem 4. *For each* $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$, $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ *in Theorem 3 satisfies*

$$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i dt + \lim_{r \to \infty} \sum_{|X_t^j| < r,\, j \ne i} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{23}$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{s}. \tag{24}$$

干渉ポテンシャル Ψ をもつ、干渉ブラウン運動について、つぎの 3 つの基本的な問題が、まだ十分に解決されていない。以下の問題はすべて、Ruelle クラスポテンシャルに話を限っても、Lennard-Jones 6-12 ポテンシャルのように代表なものに対して証明されていない。

(A) SDE の強解の存在と一意性　（上述の定理で得た解は、ブラウン運動だけの関数ではない）

(B) SDE が解を持ち実際にに運動する部分集合の「明示的な」特徴付け。つまり非平衡問題。(上述の結果は、capacity ゼロの集合が、何になるかが明示的にはわからない)

(C) 各粒子が爆発しないという条件 (A.5) の下での、Dirichlet 形式の拡張の一意性：

この問題について、以下の結果が知られている。

• (A) に対しては、$\Psi \in C_0^3(\mathbb{R}^d)$ (Lang, Fritz)、また、Ψ がハードコアをもち、遠方で指数的に減少するという条件　（種村、種村-Roelly）という 2 種類の結果しかない。

• (B) に対しては、$\Psi \in C_0^3(\mathbb{R}^d)$ かつ次元 d が 4 次元以下 (Fritz)。１次元（Rost など）。

• (C) に対しては、ハードコア・ブラウンボール (種村)。

この講演では、Dirichlet 形式の方法によって、(A) をいかに解決するか、という問題について、可能性のあると思われる、一つのアイデアを説明する。

参考文献

[1] Osada, H., *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, (to appear in J. Math. Soc Japan) available at arXiv:0905.3973

[2] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, (preprint) available at arXiv:0902.3561v1.

[3] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, (preprint).