# 対称安定過程に対する Feynman-Kac killing の処罰問題

神戸大理　矢野 孝次*

Roynette–Vallois–Yor (cf. [2]) はブラウン運動に様々な重みを与えて正規化したものの長時間極限定理を処罰問題と呼んだ．Najnudel–Roynette–Yor ([1]) は，重み過程のいくつかのクラスについて個別に得られた処罰問題が，ある universal な $\sigma$-有限測度によって統一的に理解されることを示した．

本講演では，Feynman-Kac killing の場合に的を絞り，ブラウン運動に対する処罰問題の対称安定過程への一般化を [4] に沿って述べる．この研究は Marc Yor 氏 (Paris VI) および矢野裕子氏 (京大数理研) との共同研究である．また，その証明の中で重要な役割を果たす，対称安定過程の調和変換のフェラー性 ([3]) についても触れたい．

処罰問題 (penalisation problems) とは次のような問題を指す．$(X_t, \mathcal{F}_t, P_x)$ を一次元 $\alpha$-安定過程の canonical representation とする．指数 $\alpha$ は $1 < \alpha \le 2$ を満たすと仮定する．このとき原点は正則かつ再帰的となり，局所時間 $L(t,x)$ が対応する．$\mathbb{R}$ 上の非負測度 $V(\mathrm{d}x)$ に対し，重み過程 $(\mathcal{E}_t^V)$ を

$$\mathcal{E}_t^V = \exp - \int L(t,x) V(\mathrm{d}x) \tag{1}$$

で定義する．処罰問題とは，重み過程 $(\mathcal{E}_t^V)$ に関して正規化された測度の長時間極限

$$\frac{\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x}{P_x[\mathcal{E}_t^V]} \xrightarrow{t\to\infty} \mathrm{d}P_x^V \qquad \text{along } (\mathcal{F}_s) \tag{2}$$

を調べることである．ここで，収束の意味は，

$$\frac{P_x[F_s \mathcal{E}_t^V]}{P_x[\mathcal{E}_t^V]} \xrightarrow{t\to\infty} P_x^V[F_s] \qquad \text{for any } F_s\text{: bdd } \mathcal{F}_s\text{-m'ble} \tag{3}$$

が成り立つことを言う．

Najnudel–Roynette–Yor ([1]) にならい，$\sigma$-有限測度 $\mathscr{P}$ を

$$\mathscr{P} = (\mathrm{const.}) \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/\alpha}} Q^{(u)} \bullet P_0^h \tag{4}$$

で定義する．ここで，$Q^{(u)}$ は $0$ から $0$ への長さ $u$ のピン止め過程であり，$P_0^h$ は調和変換，すなわち周遊測度 $\boldsymbol{n}$ と調和関数 $|\cdot|^{\alpha-1}$ を用いて次のように定義される $\mathcal{F}_\infty$ 上の確率測度である:

$$\mathrm{d}P_0^h|_{\mathcal{F}_t} = (\mathrm{const.})|X_t|^{\alpha-1}\mathrm{d}\boldsymbol{n}|_{\mathcal{F}_t}. \tag{5}$$

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathscr{P}$ の下での $(x + X_t : t \ge 0)$ の分布を $\mathscr{P}_x$ と書く．

*E-mail: kyano@math.kobe-u.ac.jp　　URL: http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kyano/

**定理 1**. $0 < \displaystyle\int (1+|x|^{\alpha-1})V(\mathrm{d}x) < \infty$ を仮定する．このとき次が成り立つ:

(i) $\dfrac{\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x}{\boldsymbol{n}(R>t)} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}_\infty^V \mathrm{d}\mathscr{P}_x \quad \text{along } (\mathcal{F}_s)$;

(ii) $\dfrac{P_x[\mathcal{E}_t^V]}{\boldsymbol{n}(R>t)} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathscr{P}_x[\mathcal{E}_\infty^V] =: \varphi_V(x)$;

(iii) $(\mathcal{E}_\infty^V \mathrm{d}\mathscr{P}_x)|_{\mathcal{F}_t} = \varphi_V(X_t)\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x|_{\mathcal{F}_t}$.

定理 1 によって，処罰問題の答えは次のように与えられる:

$$\frac{\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x}{P_x[\mathcal{E}_t^V]} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathcal{E}_\infty^V \mathrm{d}\mathscr{P}_x}{\varphi_V(x)} =: \mathrm{d}P_x^V \qquad \text{along } (\mathcal{F}_s). \tag{6}$$

また，極限測度 $P_x^V$ は次で特徴づけられる:

$$\mathrm{d}P_x^V|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\varphi_V(X_t)}{\varphi_V(x)}\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x|_{\mathcal{F}_t}. \tag{7}$$

定理 1 の証明においては，meander の収束が重要な役割を果たす．ここで meander とは，

$$\mathrm{d}M^{(t)} = \frac{1_{\{R>t\}}}{\boldsymbol{n}(R>t)}\mathrm{d}\boldsymbol{n}|_{\mathcal{F}_t} \tag{8}$$

で定義される $\mathcal{F}_t$ 上の確率測度を指す．

**定理 2**. $(\mathcal{E}_t : t \geq 0)$ は $0 \leq \mathcal{E}_t \leq 1$ なる乗法的汎関数とするとき，

$$\mathcal{E}_t \mathrm{d}M^{(t)} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}_\infty \mathrm{d}P_0^h \qquad \text{along } (\mathcal{F}_s). \tag{9}$$

定理 2 の証明のために，調和変換過程に対するスケール極限の漸近独立性が必要となるが，それは次の定理によって示される．

**定理 3**. 確率過程 $(|X_t|, P_x^h)$ はフェラー性を持つ．

## 参考文献


[1] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. A global view of Brownian penalisations. *Monograph, submitted*, 2008.

[2] B. Roynette and M. Yor. Penalising brownian paths: Rigorous results and meta-theorems. *Monograph, to appear in Lecture Notes in Math.*, 2008.

[3] K. Yano. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Lévy processes without Gaussian part. *submitted*, arXiv:0805.3881, 2008.

[4] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *submitted*, 2008.